

分类号_____密级_____

UDC _____



Undergraduate Dissertation

(Title) Research on Wide Band Back Negative Reflection

Student Name **Xiaoyu Niu** School Number **15020041044**

Academic Advisor **Gaokun Yu**

Department **Ocean Technology**


Grade **2015**

Dissertation Defense Date **June 6th, 2019**

Ocean University of China

Research on Wide Band Back Negative Reflection

Finished Date: *May 23th, 2019*

Advisor Signature: 

Defense Committee Signatures: 






Research on Wide Band Back Negative Reflection

Abstract

Based on the fundamental concept of interference and applying local coupled resonances, the thesis proposes the certain surface composed by periodical coupled Helmholtz resonators, which is to realize acoustical back reflection in the three-dimensional space. Moreover, it has been demonstrated that the design is feasible by theoretical inference, numerical stimulation and experiment data. What's more, combined with actual requirement, the manipulation of acoustical back reflection is applied into controlling local sound field in the music hall. Thus, the concept of reflecting loudspeaker comes up, in order to increase the energy diffracted to stage in music hall. Finally, the following analysis and methods is put forward on that acoustical back reflection is applied for the vocal reflecting loudspeaker.

Key words: interference; local coupled resonance; back reflection; vocal reflecting loudspeaker

宽带背向负反射的研究

摘要

本文基于干涉的基本物理概念，应用局域共振耦合的物理机制，设计出了周期亥姆霍兹共鸣器界面，旨在实现三维空间的声波背向反射。同时，分别从理论推导、数值仿真、实验数据三个角度说明了这种方法的可行性。此外，结合实际需求，将这种声波背向反射的操控应用于自然声音乐厅局域声场控制，提出了自然声返听音响的设计概念，旨在增加自然声音乐厅舞台声能量分布，从而有助于演唱者的表达。最后，给出了声波背向反射应用于自然声返听音响的后续研究思路。

关键词：干涉 居于共振耦合 背向反射 自然声返听音响

目录

1 绪论	8
1.1 引言.....	8
1.2 研究内容及意义.....	9
2 理论基础	11
2.1 叠加原理.....	11
2.2 干涉现象.....	12
2.3 光栅方程.....	13
2.4 管中输入阻抗.....	14
3 声学模型	16
3.1 梳状周期界面.....	16
3.2 亥姆霍兹共鸣器的输入阻抗.....	25
3.3 亥姆霍兹共鸣器周期界面.....	28
4 数值仿真与实验	32
4.1 数值计算.....	32
4.2 实验研究.....	37
5 应用研究	43
5.1 应用背景.....	43
5.2 自然声返听音响.....	45
5.3 自然声（律音）返听音响.....	46

6 总结与展望	47
6.1 总结	47
6.2 展望	47
6.2.1 方位角与反射系数的关系	48
6.2.2 返听音响对声能量分布的影响	50
7 参考文献	52

图表目录

图 2.3-1 二维结构光栅剖面 ^[8]	13
图 2.4-1 管中输入阻抗示意图	14
图 3.1-1 梳状周期性界面及入射波示意图	16
图 3.1-2 梳状周期性界面的尺寸表示	17
图 3.1-3 $x-y$ 面上梳状周期性结构的俯视图	20
图 3.2-1 亥姆霍兹共鸣器的相关参数	25
图 3.3-1 亥姆霍兹共鸣器周期界面	28
图 4.1-1 简化后的二维亥姆霍兹共鸣器周期界面	32
图 4.1-2 $m=0$ 时的数值计算结果	35
图 4.1-3 $m=0, -1$ 时的数值计算结果	35
图 4.1-4 对 $m=0$ 数值计算取对数运算之后的结果	36
图 4.1-5 周期亥姆霍兹共鸣器反射相位随频率的变化关系	37
图 4.2-1 实验装置示意图	38
图 4.2-2 入射波为 3430Hz 空间波束形成结果	39
图 4.2-3 入射波为 4459Hz 空间波束形成结果	39
图 4.2-4 入射波为 5154Hz 波束形成结果	40
图 4.2-5 实验误差及代表性分析	40

图 4.2-6 入射波 $\theta = -20^\circ$	41
图 4.2-7 反射波 $\theta' = 36^\circ$	41
图 4.2-8 入射波 $\theta = 20^\circ$	42
图 4.2-9 反射波 $\theta' = -40^\circ$	42
图 5.1-1 舞台音响布置情况 ^[43]	44
图 5.2-1 音乐厅结构示意图	45
图 5.2-2 音乐厅模型的侧截面示意图	45
图 6.2-1 犄角与方位角的描述	48
图 6.2-2 方位角 $\theta = 0^\circ$	48
图 6.2-3 方位角 $\theta = -15^\circ$	49
图 6.2-4 方位角 $\theta = -30^\circ$	49
图 6.2-5 方位角 $\theta = -45^\circ$	49
图 6.2-6 方位角 $\theta = -60^\circ$	50
图 6.2-7 方位角 $\theta = -75^\circ$	50
图 6.2-8 返听音响对声能量空间分布的影响	51

1 绪论

1.1 引言

所谓背向反射，指的就是衍射波沿入射方向能量分布明显增强，而沿其它衍射方向能量分布明显减弱。所以说，背向反射实质上是一种衍射异常现象。而对于这种衍射异常现象的研究起源于光学领域，随后发展到了声学领域。早在 1902 年，Wood^[1]就提到了在衍射光栅的实际测量实验中，在某些波长处衍射光强不符合理论计算结果，往往会偏大或者偏小。这种现象被称为光栅的衍射反常。由于最早发现这种现象的是 Wood，所以这种现象也成为 Wood 反常。随后的研究发现衍射反常和入射角、波长、偏振及光栅的结构槽型有关。^[2]

关于 Wood 反常的早期研究，Rayleigh^[3]仅仅给出了反常出现的位置，但对于强度如何分配没有给出定量的分析。之后的研究发现，Wood 反常发生的条件一般来说有两个^[4]：一种依赖于入射波的角度和周期间距，这种衍射反常成为 Rayleigh 反常^[5]；另外一种依赖于界面阻抗共振或者说局域共振，这种衍射反常也成为共振反常。到 1975 年，Hessel^[6]等人研究发现，在满足 Bragg 衍射条件下，通过矩形凹槽可以实现 Wood 反常。随后的研究发现，在某些非 Bragg 衍射点上也同样会出现 Wood 反常^[7]。这些研究都表明，局域共振^[6-9]（混合界面共振状态^[10]）在实现波阵面操控方面是可行的，所以，Wood 反常能够发生。在此之后，人们将这种局域共振耦合的物理机制应用到声波波阵面操控上，特别在集总参数假设下研究周期排列的亥姆霍兹共鸣器^[11-15]进行研究。到了 2011 年，Zhang 等^[16, 17]研究人员尝试利用这种局域共振的方法，来设计一种周期排列亥姆霍兹共鸣器来实现声波的背向衍射（背向反射）。随后的几年里，Yang 等人尝试将这种方法致力于“声透明”的实现^[18]。同时，还有人尝试将这种方法来研究并加强声子晶体的某些特性^[19, 20]。

本文同样是通过局域共振的方法来设计一种声学结构，使得入射到上面的声波能够实现背向反射，也就是上文所说的“Wood 反常”现象。但与上文提到的 Zhang 等人^[16, 17]所实现的声波背向反射是不同的：Zhang 等人，在亚波长的范围里，仅通过一种尺寸的亥姆霍兹共鸣器组成周期结构，这种局域共振的设计方法

确实能够实现声波的背向反射，但是仅能实现某一波长声波的背向反射；但是本文通过应用局域共振耦合的物理方法，在亚波长的范围里设计出一种周期声学结构，该声学结构以 36 不同尺寸的亥姆霍兹共鸣器作为一个周期单元，这种周期设计极大拓展了背向反射的带宽。这种拓展带宽的设计思路，为后人的相关研究奠定了基础，同时更加有利于这样的声学结构（声学超材料^[21]）应用的发展。

1.2 研究内容及意义

本文的研究内容基本分为以下几部分：

第一章的引言部分，主要介绍了本文研究内容的历史渊源和当前的研究现状，同时也点到了相较于前人研究，本文研究的最大亮点是“宽带”的 Wood 反常。最后，给到了全文内容的概括，便于读者在阅读过程中能够理清脉络、把握结构。

第二章主要介绍了文中所用到的一些基本的声学概念或者理论。一方面，考虑到本文的完备性，这部分内容还是很有必要的；另一方面，后文多次提到这些概念或者理论，第二章内容的添加方便了读者的及时翻阅。

第三章介绍了实现背向反射的声学模型。这一部分为本文的重点，因为在这一部分，笔者通过严谨的数学推导构建了能够实现背向反射（Wood 反常）的声学模型。同时，考虑到很多读者对于这部分内容会存在阅读上的困难，所以，笔者由浅入深，由“梳状周期界面”到“亥姆霍兹周期界面”。同时，在涉及某些推导细节的时候，笔者不吝笔墨，添加了许多脚注和推导过程，以便于读者更好地理解。

第四章主要通过数值计算和实验来进一步验证应用亥姆霍兹共鸣器周期界面对于实现声波背向反射的可能，所以本章节是全文的核心。在第三章是用周期亥姆霍兹共鸣器构建了声波操控界面，旨在实现三维空间中的声波背向反射。但是考虑到算力有限和实验条件有限，所以就把第三章中构建的界面结构减少了一个维度，来进行数值仿真和实验。这样的简化是完全可以的，因为从本质上讲，二维背向反射和三维背向反射都是应用了局域共振耦合的物理机制。所以，从数值仿真和实验的结果上，周期亥姆霍兹共鸣器界面背向反射的物理效果将一目了然。

第五章阐述了一种返听音响设计，这一章是全文最具特色的一章。前面几章

构建了周期亥姆霍兹共鸣器界面,这种界面能够在宽带和宽角度的范围内实现声波的背向反射。同时,笔者结合自身对于古典音乐演唱(自然声演唱)了解,并调研了中国海洋大学艺术系古典音乐演唱方向师生的切身感受,创造性的提出了一种背向反射的应用——自然声返听音响和自然声(律音)返听音响。旨在通过这种返听音响实现古典音乐厅中声能量的局域控制,使得舞台上有更多的声能量,从而演唱者更好地听到自己的声音,进而到达更好的演唱效果。

第六章对全文做出了总结并指出本文研究工作存在的不足。本文虽然通过周期亥姆霍兹共鸣器周期界面实现了声波的背向反射,但是在反射系数与入射波入射方向的研究还十分不完善:仅仅是研究了反射系数与入射波入射角之间的关系,没有给出反射系数与入射波入射方位角之间的关系。这不得不说是三维退化到二维研究必然会缺少的研究部分。所以,在这一部分的“展望”中,笔者给出了接下来反射系数与入射方位角研究的思路。再者,周期亥姆霍兹共鸣器界面应用于自然声返听音响的设计,这项应用的实质在于将本应该入射到观众席声能量一部分切下来放到了舞台上。这就势必会造成,观众席声能量的减少。那么,在保证演唱者返听的要求下,如何使入射到观众席的声能量最多呢?这个问题的提出,为后人研究思路的确立奠定了一定基础。

2 理论基础

2.1 叠加原理

对于描述小振幅声波传播规律的波动方程¹,

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.1-1)$$

对于上式, 从数学上讲是线性方程, 这就反映了小振幅声波满足叠加原理, 下面予以证明²:

这里首先以两个波的叠加为例, 然后再推广到多列波的情况。设两列波的声压分别为 p_1 和 p_2 , 满足,

$$\nabla^2 p_1 = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \quad (2.1-2)$$

$$\nabla^2 p_2 = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} \quad (2.1-3)$$

将上面两个式子, 左右两端相加。由于每个方程都是线性的, 所以得到,

$$\nabla^2 (p_1 + p_2) = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 (p_1 + p_2)}{\partial t^2} \quad (2.1-4)$$

同时, p_1 和 p_2 的合成声场的声压 p , 也满足,

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.1-5)$$

那么, 我们就可以得到,

$$p = p_1 + p_2 \quad (2.1-6)$$

这就说明两列声波合成声场的声压等于每列声波的声压之和, 这就是声波的

¹ 由于这部分内容实在基础, 笔者就不再赘述, 详情参见: 杜功焕, 朱哲民, 龚秀芳, 声学基础, 第3版, 南京: 南京大学出版社, 2012. 110-118

² 虽然这部分内容比较基础, 但考虑到本文给出的局域共振实现背向反射的本质就在于干涉, 而干涉的前提又是叠加原理。所以, 从本文的完备性上考虑, 这一部分还是有写作的必要性的。

叠加原理。显然，此结论可以推广到多列声波同时存在的情况。

2.2 干涉现象

当两列波频率相同、相位差固定时，它们叠加的时候会发生干涉现象。

假定到达空间某位置两列声波分别为，

$$p_1 = p_{1a} \cos(\omega t - \varphi_1) \quad (2.2-1)$$

$$p_2 = p_{2a} \cos(\omega t - \varphi_2) \quad (2.2-2)$$

假定两列波到达位置时的相位差 $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$ 不随时间变化。由叠加原理，合成声场的声压为，

$$p = p_1 + p_2 = p_a \cos(\omega t - \varphi) \quad (2.2-3)$$

其中，

$$\left. \begin{aligned} p_a &= \sqrt{p_{1a}^2 + p_{2a}^2 + 2p_{1a}p_{2a} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \varphi &= \arctan \frac{p_{1a} \sin \varphi_1 + p_{2a} \sin \varphi_2}{p_{1a} \cos \varphi_1 + p_{2a} \cos \varphi_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.2-4)$$

(2.2-3) (2.2-4) 式说明该位置上合成声压仍然是一个相同频率的声振动，但是合成声压的振幅并不等于两列声波声压的振幅之和，而是与两列声波的相位差 ψ 有关。

声压振幅的平方反映了声场中平均能量密度的大小，对声压的平方做时间上的平均可以得到合成声波的平均能量密度，

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \frac{p_{1a} p_{2a}}{\rho_0 c_0^2} \cos \psi \quad (2.2-5)$$

(2.2-5) 中的 $\bar{\varepsilon}_1$ 与 $\bar{\varepsilon}_2$ 分别表示 p_1 与 p_2 的平均能量密度；同时，该式子说明了声场中各位置的平均能量密度与两列声波到达该位置时的相位差 ψ 有关。

如果某些位置上存在 $\psi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ 这就意味着两列声波始终是以相同的相位到达空间中的这些位置，则

$$\left. \begin{aligned} p_a &= p_{1a} + p_{2a} \\ \bar{\varepsilon} &= \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \frac{p_{1a}p_{2a}}{\rho_0 c_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.2-6)$$

如果另外一些位置上 $\psi = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ 这意味着两列声波始终以相反相位到达, 则

$$\left. \begin{aligned} p_a &= p_{1a} - p_{2a} \\ \bar{\varepsilon} &= \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 - \frac{p_{1a}p_{2a}}{\rho_0 c_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.2-7)$$

从(2.2-6)(2.2-7)式中可以明显地看出, 由于两列波的叠加, 空间中的某些位置能量增大了, 空间中某些位置的能量减小了。那么, 这种使得能量在空间中重新分布的现象成为波的干涉。

2.3 光栅方程

本文提到的周期亥姆霍兹共鸣器界面可以和光学中的衍射光栅进行类比, 衍射光栅是最典型的利用周期界面做成的光学元器件。

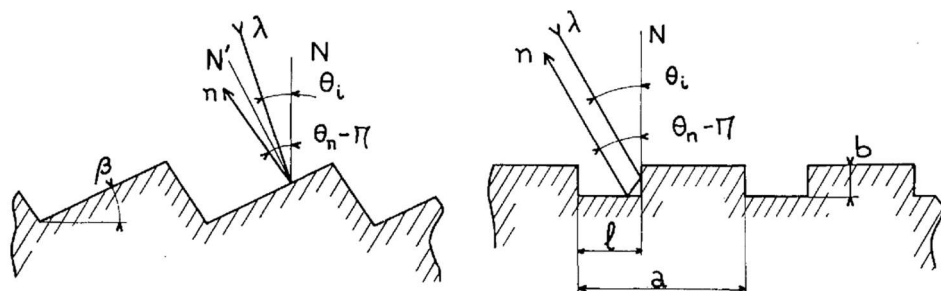


图 2.3-1 二维结构光栅剖面^[8]

图 2.3-1 给出了两种不同的光栅剖面图, 根据周期要求通过电磁场理论, 的推导, 我们可以得到如下光栅方程:^[22]

$$\sin \theta_i + \sin \theta_n = n \frac{\lambda}{a} \quad (2.3-1)$$

其中, θ_i 、 θ_n 分别是入射角和第 n 级衍射角, a 、 λ 分别是光栅周期和入射光波波长。同时, 值得注意的是, 这本质上就是波在周期介质中的传播问题。对于这类问题, 早在 1883 年, Floquet 就针对一维 Mathieu 方程进行研究^[23], 提出了 Floquet 周期理论; Bloch 于 1928 年将 Floquet 的结论推广到了三维情形

^[24]，得到了著名的 Bloch 定理。所以，上述光栅方程 (2.3-1) 也可以从 Bloch 定理的角度得到。

2.4 管中输入阻抗

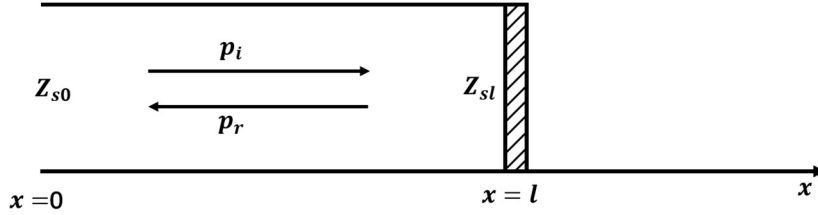


图 2.4-1 管中输入阻抗示意图

设管口位于坐标原点，管长为 l ，在末端 l 处有一声负载，其声阻抗为 Z_{sl} （或者阻抗率为 Z_{sl} ）。在管中存在入射波 p_i 与反射波 p_r ，如图 3.1-1 梳状周期性界面及入射波示意图，入射波和反射波声压可表示为，

$$p_i = p_{ai} e^{j(\omega t - kx)} \quad (2.4-1)$$

$$p_r = p_{ar} e^{j(\omega t - kx)} \quad (2.4-2)$$

质点速度可以表示为，

$$v_i = v_{ai} e^{j(\omega t - kx)} \quad (2.4-3)$$

$$v_r = v_{ar} e^{j(\omega t - kx)} \quad (2.4-4)$$

其中， $v_{ai} = \frac{p_{ai}}{\rho_0 c_0}$ ， $v_{ar} = -\frac{p_{ar}}{\rho_0 c_0}$ 。在管中任一点的总声压为，

$$p = p_i + p_r \quad (2.4-5)$$

质点速度为，

$$v = v_i + v_r = \frac{p_i}{\rho_0 c_0} - \frac{p_r}{\rho_0 c_0} \quad (2.4-6)$$

所以，管中任一点的声阻抗率为，

$$Z_s = \frac{p}{v} = \rho_0 c_0 \frac{p_{ai} e^{-jkx} + p_{ar} e^{jkx}}{p_{ai} e^{-jkx} - p_{ar} e^{jkx}} \quad (2.4-7)$$

因为已知 l 处的声阻抗率 Z_{sl} ，所以，

$$Z_{sl} = \frac{p}{v} = \rho_0 c_0 \frac{p_{ai} e^{-jkl} + p_{ar} e^{jkl}}{p_{ai} e^{-jkl} - p_{ar} e^{jkl}} \quad (2.4-8)$$

那么，在 $x=0$ 的位置可得到管口处的声阻抗率，

$$Z_{s0} = \rho_0 c_0 \frac{p_{ai} + p_{ar}}{p_{ai} - p_{ar}} \quad (2.4-9)$$

联合 (2.4-8) 和 (2.4-9)，得到

$$Z_{s0} = \rho_0 c_0 \frac{Z_{sl} + j\rho_0 c_0 \tan kl}{\rho_0 c_0 + jZ_{sl} \tan kl} \quad (2.4-10)$$

或者用声阻抗来表示，

$$Z_{a0} = \frac{\rho_0 c_0}{S} \frac{Z_{sl} + j \frac{\rho_0 c_0}{S} \tan kl}{\frac{\rho_0 c_0}{S} + jZ_{sl} \tan kl} \quad (2.4-11)$$

Z_{s0} 和 Z_{a0} 称为管的输入声阻抗率和输入声阻抗，而 (2.4-10) (2.4-11) 就是声阻抗转移公式。从这两个公式可以看到，管的输入阻抗不仅与管末端的负载有关，并且还取决于管的长度。

3 声学模型

早在 2011 年，张亚东等^[17]就已经对利用亥姆霍兹共鸣器对声波实现背向反射有了较为充分的研究。他们所采用方法的本质就是干涉，即由凹槽外所产生的反射波和由亥姆霍兹共鸣器所产生的反射波在常规反射方向的干涉相消，而在背向反射方向实现干涉相长。但存在的问题是，特定的结构尺寸仅能操控特定频率的声波，即实现的是窄带范围内的声波背向反射。本文同样采用亥姆霍兹共鸣器作为声波相位操控的基本单元，但使得结构尺寸远小于声波波长。在集总参数假设下，利用局域共振耦合实现声波的背向反射。这样做虽然结构设计繁琐复杂，但是可以使得在宽带范围内实现声波的背向反射效果。

由于结构复杂，为了能更加清楚地表达，将该部分内容分为三部分来表达。首先，介绍简单结构（梳状周期性界面）如何利用局域共振和周期共振实现背向反射；之后，推导亥姆霍兹共鸣器的输入阻抗；最后，得到特定结构参数下亥姆霍兹共鸣器组成的周期性界面的反射系数与入射波频率、角度的关系。

3.1 梳状周期性界面

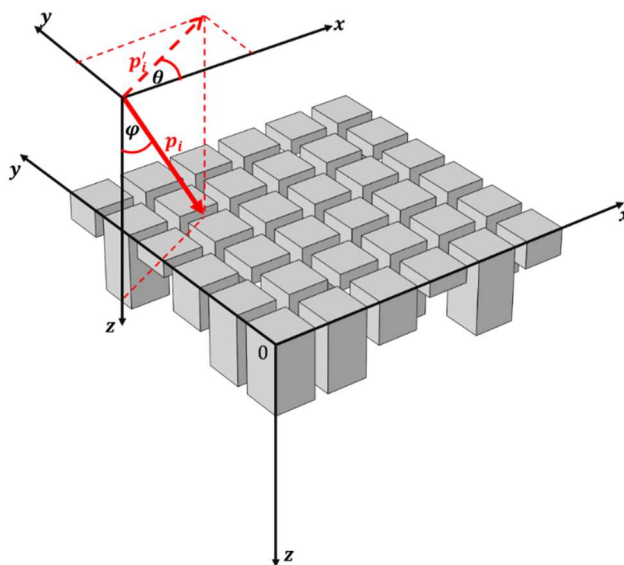


图 3.1-1 梳状周期性界面及入射波示意图

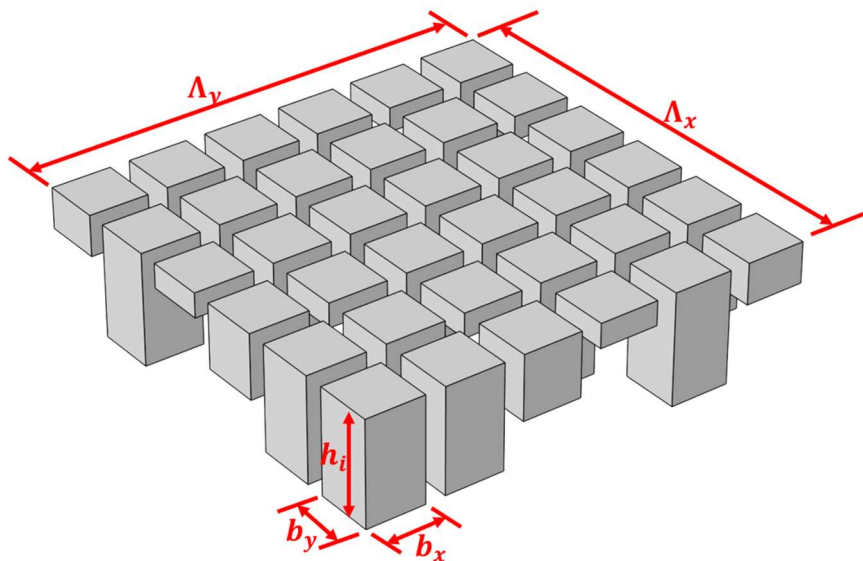


图 3.1-2 梳状周期性界面的尺寸表示

图 3.1-1 中灰色部分为梳状周期性界面，取 36 个柱状凹槽为空间反射界面的最小结构单元³。这里为了简化，每个梳状凹槽的长、宽均相同，仅仅是每个梳状凹槽的深度不同。由于每个凹槽结构的深度不同，所以反射声波的相位即不同。这样获得了不同相位的反射声波，就可以对声波进行波阵面操控，从而实现声波的背向反射。同时，为了分析方便，梳状结构的凹槽界面为绝对硬的界面条件。

入射波 p_i (如图 3.1-1) 入射到界面上。入射波方向如图中红色实线箭头所示，其方向与 z 轴夹角为 φ ；图中虚线箭头为入射波在 $x-y$ 平面的投影 p'_i ，该投影与 x 轴夹角为 θ 。

那么，在此基础上，可以得到入射平面声波的形式为^[25]，

$$p_i = p_{ia} e^{j(\omega t - k \sin \theta \sin \varphi x - k \sin \theta \cos \varphi y - k \cos \theta z)} \quad (3.1-1)$$

为了简化计算，不妨将声压模的大小设为单位值，同时忽略声压的时域变化信息。那么，

$$p_i = e^{jk \sin \theta \cos \varphi x + jk \sin \theta \sin \varphi y + jk \cos \theta z} \quad (3.1-2)$$

³ 这里将 36 个凹槽作为周期界面的最小单元的原因：我们在信号分析中，我们通常采用 6 个点来表示一个周期正弦信号，这样既满足了奈奎斯特采样定律，同时保证了数据量不至于过大。而这种信号分析的想法仅仅是，一维情形；那么，扩展到二维，自然而然想到最小结构单元为 36 个。

由 Floquet 周期理论^[26, 27]，反射波的形式可以表示为，

$$P_r = \sum_n \sum_m r_{nm} e^{jk\beta_n x + jk\gamma_m y + k\alpha_{nm} z} \quad (3.1-3)$$

其中，

$$\begin{cases} \beta_n = \sin \theta \cos \varphi + n \frac{2\pi}{k\Lambda_x} \\ \gamma_m = \sin \theta \sin \varphi + m \frac{2\pi}{k\Lambda_y} \\ \alpha_{nm} = -j\sqrt{1 - \beta_n^2 - \gamma_m^2} \end{cases} \quad (3.1-4)$$

(3.1-4) 中的 n 表示 x 轴方向的简正波的号数， m 表示 y 轴方向简正波的号数。 Λ_x 表示界面结构在 x 轴方向空间周期长度， Λ_y 表示界面结构在 y 轴方向空间周期长度。 k 表示波束。

在 $z = 0$ 的平面，声速表示为入射声速与反射声速的叠加，

$$u(x, y, 0) = u_i(x, y, 0) + u_r(x, y, 0) \quad (3.1-5)$$

又由

$$jk\rho cu = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.1-6)$$

联立 (3.1-2) (3.1-3) (3.1-4) (3.1-5) (3.1-6)，整理得到，

$$jk\rho cu_i = \frac{\partial p_i}{\partial z} = e^{jk \sin \theta \cos \varphi x + jk \sin \theta \sin \varphi y + jk \cos \theta z} (jk \cos \theta) \quad (3.1-7)$$

即，⁴

$$jk\rho cu_r = \sum_n \sum_m r_{nm} e^{jk\beta_n x + jk\gamma_m y + k\alpha_{nm} z} (k\alpha_{nm}) \quad (3.1-8)$$

那么，

⁴ 该步骤的推导过程：

$$jk\rho cu_r = \frac{\partial}{\partial z} \left[\sum_n \sum_m r_{nm} e^{jk\beta_n x + jk\gamma_m y + k\alpha_{nm} z} \right] = \sum_n \sum_m \frac{\partial}{\partial z} \left[r_{nm} e^{jk\beta_n x + jk\gamma_m y + k\alpha_{nm} z} \right] = \sum_n \sum_m r_{nm} e^{jk\beta_n x + jk\gamma_m y + k\alpha_{nm} z} (k\alpha_{nm})$$

$$\begin{aligned}
 jk\rho c(u_i(x, y, 0) + u_r(x, y, 0)) &= e^{jk \sin \theta \cos \varphi x + jk \sin \theta \sin \varphi y} (k \cos \theta) + \sum_n \sum_m r_{nm} e^{jk\beta_n x + jk\alpha_m y} (k\alpha_{nm}) \\
 &= -k\alpha_{00} e^{jk\beta_0 x + jk\gamma_0 y} + \sum_n \sum_m r_{nm} e^{jk\beta_n x + jk\alpha_m y} (k\alpha_{nm}) \\
 &= jkc\rho(x, y, 0)
 \end{aligned} \tag{3.1-9}$$

假设单元结构满足一定阻抗条件，按照集总假设计算得到的结果与分离开计算结果等同，即分别在周期和凹槽口上对 $\frac{\partial p}{\partial z}$ 积分，于是，

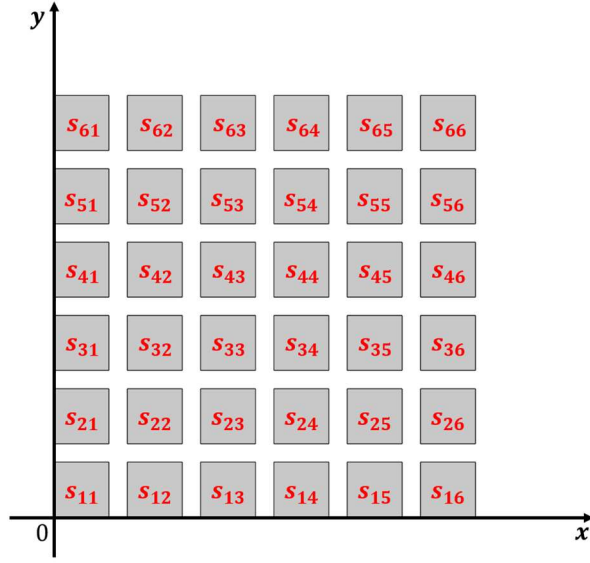
$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{\Lambda_x}{2}}^{\frac{\Lambda_x}{2}} \int_{-\frac{\Lambda_y}{2}}^{\frac{\Lambda_y}{2}} -k\alpha_{00} e^{jk\beta_0 x} e^{jk\gamma_0 y} e^{-jk\beta_n x} e^{-jk\gamma_m y} dx dy + \int_{-\frac{\Lambda_x}{2}}^{\frac{\Lambda_x}{2}} \int_{-\frac{\Lambda_y}{2}}^{\frac{\Lambda_y}{2}} \sum_p \sum_q r_{pq} k\alpha_{pq} e^{jk\beta_p x} e^{jk\gamma_q y} e^{-jk\beta_n x} e^{-jk\gamma_m y} dx dy \\
 = \sum_i \left[\iint_{s_i} jkc\rho u(x, y, 0) e^{-jk\beta_n x} e^{-jk\gamma_m y} dx dy \right]
 \end{aligned} \tag{3.1-10}$$

其中，

$$U_i(z) = \iint_{s_i} u(x, y, 0) dx dy \tag{3.1-11}$$

$$U_i(0) = \iint_{s_i} u(x, y, 0) dx dy \tag{3.1-12}$$

这里的 s_i 是每个梳状凹槽的开口面积，为了清晰表达，下面给出梳状周期性界面结构的俯视图（ $x-y$ 面），


 图 3.1-3 $x-y$ 面上梳状周期性结构的俯视图

那么, (3.1-10) 就可以化简表示为,

$$-k\alpha_{00}\Lambda_x\Lambda_y\delta_{0n}\delta_{0m} + r_{nm}k\alpha_{nm}\Lambda_x\Lambda_y = jk\rho c \sum_i U_i(0) \left[\frac{1}{b_x} \frac{1}{b_y} \iint_{s_i} e^{-jk\beta_n x} e^{-jk\gamma_m y} dx dy \right] \quad (3.1-13)$$

然后,

$$r_{nm}k\alpha_{nm}\Lambda_x\Lambda_y = k\alpha_{00}\Lambda_x\Lambda_y\delta_{0n}\delta_{0m} + jk\rho c \sum_i U_i(0) \left[\frac{1}{b_x} \frac{1}{b_y} \iint_{s_i} e^{-jk\beta_n x} e^{-jk\gamma_m y} dx dy \right] \quad (3.1-14)$$

进而,

$$r_{nm} = \frac{\alpha_{00}}{\alpha_{nm}} \delta_{0n}\delta_{0m} + \frac{j}{\alpha_{nm}} \frac{\rho c}{\Lambda_x\Lambda_y} \sum_i U_i(0) \left[\frac{1}{b_x} \frac{1}{b_y} \iint_{s_i} e^{-jk\beta_n x} e^{-jk\gamma_m y} dx dy \right] \quad (3.1-15)$$

为了方便表示, 特作如下定义,

$$\left. \begin{aligned} R_\Sigma &= \frac{\rho c}{\Lambda_x\Lambda_y} \\ \Phi_{inm}(\theta) &= \frac{1}{b_x} \frac{1}{b_y} \iint_{s_i} e^{-jk\beta_n x} e^{-jk\gamma_m y} dx dy \end{aligned} \right\} \quad (3.1-16)$$

所以, 对上述反射系数的表达式整理可得,

$$r_{nm} = \frac{\alpha_{00}}{\alpha_{nm}} \delta_{0n}\delta_{0m} - (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \sum_i \Phi_{inm}(\theta) U_i(0) \quad (3.1-17)$$

对于 $z = 0$ 的平面，声压亦可以表示为入射声压和反射声压的叠加，即

$$p(x, y, 0) = p_i(x, y, 0) + p_r(x, y, 0) \quad (3.1-18)$$

由 Floquet 周期理论^[26, 27],

$$p(x, y, z) = e^{jk \sin \theta \cos \varphi x + jk \sin \theta \sin \varphi y + jk \cos \theta z} + \sum_n \sum_m r_{nm} e^{jk \beta_n x + jk \gamma_m y + k \alpha_{nm} z} \quad (3.1-19)$$

把反射系数的表达式 (3.1-17) 代入 (3.1-19)，得

$$\begin{aligned} p(x, y, 0) &= e^{jk \sin \theta \cos \varphi x + jk \sin \theta \sin \varphi y} + \sum_n \sum_m \left[\frac{\alpha_{00}}{\alpha_{nm}} \delta_{0n} \delta_{0m} - (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \sum_i \Phi_{inm}(\theta) U_i(\theta) \right] e^{jk \beta_n x + jk \gamma_m y} \\ &= e^{jk \sin \theta \cos \varphi x + jk \sin \theta \sin \varphi y} + \sum_n \sum_m \frac{\alpha_{00}}{\alpha_{nm}} \delta_{0n} \delta_{0m} e^{jk \beta_n x + jk \gamma_m y} - \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \sum_i \Phi_{inm}(\theta) U_i(\theta) e^{jk \beta_n x + jk \gamma_m y} \end{aligned} \quad (3.1-20)$$

又由，

$$\begin{cases} \beta_n = k \sin \theta \cos \varphi + n \frac{2\pi}{\Lambda_x} \\ \gamma_m = k \sin \theta \sin \varphi + m \frac{2\pi}{\Lambda_y} \end{cases} \quad (3.1-21)$$

将 (3.1-21) 代入 (3.1-20) 中去，得到

$$p(x, y, 0) = 2e^{jk \sin \theta \cos \varphi x + jk \sin \theta \sin \varphi y} - \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \sum_i \Phi_{inm}(\theta) U_i(\theta) e^{jk \beta_n x + jk \gamma_m y} \quad (3.1-22)$$

针对上式，分别在三个凹槽开口处积分，

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b_x} \frac{1}{b_y} \iint_{s_i} p(x, y, 0) dx dy \\ &= \frac{1}{b_x} \frac{1}{b_y} \iint_{s_i} \left[2e^{jk \sin \theta \cos \varphi x + jk \sin \theta \sin \varphi y} - \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \sum_i \Phi_{inm}(\theta) U_i(\theta) e^{jk \beta_n x + jk \gamma_m y} \right] dx dy \\ &= \frac{1}{b_x} \frac{1}{b_y} \iint_{s_i} 2e^{jk \sin \theta \cos \varphi x + jk \sin \theta \sin \varphi y} dx dy - \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \sum_i \Phi_{inm}(\theta) \left[\frac{1}{b_x} \frac{1}{b_y} \iint_{s_i} e^{jk \beta_n x + jk \gamma_m y} dx dy \right] U_i(\theta) \end{aligned} \quad (3.1-23)$$

为了方便表示，做如下方面定义，

$$\Phi_{inm}^*(\theta) = \frac{1}{b_x} \frac{1}{b_y} \iint_{s_i} e^{jk \sin \theta \cos \varphi x + jk \sin \theta \sin \varphi y} dx dy \quad (3.1-24)$$

将 (3.1-24) 代入 (3.1-23)，整理得到，

$$\frac{1}{b_x} \frac{1}{b_y} \iint_{s_l} p(x, y, 0) dx dy = 2\Phi_{100}^*(\theta) - \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \sum_i \Phi_{inm}(\theta) \Phi_{inm}^*(\theta) U_i(\theta) \quad (3.1-25)$$

又由,

$$\bar{p}_l(0) = \frac{1}{b_x} \frac{1}{b_y} \iint_{s_l} p(x, y, 0) dx dy \quad (3.1-26)$$

表示第 l 个凹槽管口处的平均声压,

$$\begin{aligned} \bar{p}_l(0) &= 2\Phi_{lnm}^*(\theta) - \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \sum_i \Phi_{inm}^*(\theta) U_i(\theta), \\ l &= 1, 2, 3, \dots, 36 \end{aligned} \quad (3.1-27)$$

其中,

$$Z_{li} = \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \Phi_{inm}^*(\theta) \Phi_{inm}(\theta) \quad (3.1-28)$$

由于上述等式过于简练, 可能会使读者阅读理解起来比较吃力, 那么笔者尝试将其展开, 方便读者的理解和阅读,

$$\begin{aligned} 2\Phi_{100}^*(\theta) - \bar{p}_1(0) &= Z_{11}U_1(0) + Z_{12}U_2(0) + \dots + Z_{136}U_{36}(0) \\ 2\Phi_{200}^*(\theta) - \bar{p}_2(0) &= Z_{21}U_1(0) + Z_{22}U_2(0) + \dots + Z_{236}U_{36}(0) \\ 2\Phi_{300}^*(\theta) - \bar{p}_3(0) &= Z_{31}U_1(0) + Z_{32}U_2(0) + \dots + Z_{336}U_{36}(0) \\ &\vdots \\ 2\Phi_{3600}^*(\theta) - \bar{p}_{36}(0) &= Z_{361}U_1(0) + Z_{362}U_2(0) + \dots + Z_{3636}U_{36}(0) \end{aligned} \quad (3.1-29)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \Phi_{1nm}^*(\theta) \Phi_{1nm}(\theta) \\ Z_{12} &= \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \Phi_{1nm}^*(\theta) \Phi_{2nm}(\theta) \\ &\vdots \\ Z_{136} &= \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \Phi_{1nm}^*(\theta) \Phi_{36nm}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.1-30)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_{21} &= \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \Phi_{2nm}^*(\theta) \Phi_{1nm}(\theta) \\ Z_{22} &= \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \Phi_{2nm}^*(\theta) \Phi_{2nm}(\theta) \\ &\vdots \\ Z_{236} &= \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \Phi_{2nm}^*(\theta) \Phi_{36nm}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.1-31)$$

$$\dots\dots \quad (3.1-32)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_{361} &= \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \Phi_{36nm}^*(\theta) \Phi_{1nm}(\theta) \\ Z_{362} &= \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \Phi_{36nm}^*(\theta) \Phi_{2nm}(\theta) \\ &\vdots \\ Z_{3636} &= \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \Phi_{36nm}^*(\theta) \Phi_{36nm}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.1-33)$$

其中，表达式中互阻抗的形式体现了三个共鸣器之间的耦合，三个共鸣器管口处的阻抗可以由转移阻抗公式⁵的到，

$$Z_{a0} = \frac{\rho c}{\sigma} \frac{Z_{al} - j \frac{\rho c}{\sigma} \tan(kh)}{\frac{\rho c}{\sigma} - j Z_{al} \tan(kh)} \quad (3.1-34)$$

其中，凹槽末端为硬边界，即 $Z_{al} \rightarrow \infty$ ，同时 $\sigma \rightarrow b_x b_y$ 。那么，

$$Z_{a0} = \frac{j\rho c}{b_x b_y \tan(kh)} \quad (3.1-35)$$

$Z_i = \frac{j\rho c}{b_x b_y \tan(kh_i)}$ ， h_i 代表第 i 个凹槽的深度。则管口处的声压、阻抗、体积速度的关系表达式为，

系表达式为，

$$\bar{p}_i(0) = Z_i U_i(0) \quad (3.1-36)$$

将 (3.1-36) 代入 (3.1-29)，得

$$\begin{aligned} 2\Phi_{100}^*(\theta) &= (Z_{11} + Z_1)U_1(0) + Z_{12}U_2(0) + \cdots + Z_{136}U_{36}(0) \\ 2\Phi_{200}^*(\theta) &= (Z_{21} + Z_2)U_1(0) + Z_{22}U_2(0) + \cdots + Z_{236}U_{36}(0) \\ 2\Phi_{300}^*(\theta) &= (Z_{31} + Z_3)U_1(0) + Z_{32}U_2(0) + \cdots + Z_{336}U_{36}(0) \\ &\vdots \\ 2\Phi_{3600}^*(\theta) &= (Z_{361} + Z_{36})U_1(0) + Z_{362}U_2(0) + \cdots + Z_{3636}U_{36}(0) \end{aligned} \quad (3.1-37)$$

采用矩阵的形式表示为，

⁵ 杜功焕，朱哲民，龚秀芳，声学基础第3版。南京：南京大学出版社，2012. 166-167。由于前文已经引用过这个书了，这个不再赘述，但为了读者能更好地理解本文，故将相关内容信息放在脚注中，以方便读者查阅。

$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & Z_{136} \\ Z_2 + Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \cdots & Z_{236} \\ Z_3 + Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \cdots & Z_{336} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{36} + Z_{361} & Z_{362} & Z_{363} & \cdots & Z_{3636} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(0) \\ U_2(0) \\ U_3(0) \\ \vdots \\ U_{36}(0) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \Phi_{100}^*(\theta) \\ \Phi_{200}^*(\theta) \\ \Phi_{300}^*(\theta) \\ \vdots \\ \Phi_{3600}^*(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.1-38)$$

其中,

$$D_1 = \begin{bmatrix} 2\Phi_{100}^*(\theta) & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & Z_{136} \\ 2\Phi_{200}^*(\theta) & Z_{22} & Z_{23} & \cdots & Z_{236} \\ 2\Phi_{300}^*(\theta) & Z_{32} & Z_{33} & \cdots & Z_{336} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\Phi_{3600}^*(\theta) & Z_{362} & Z_{363} & \cdots & Z_{3636} \end{bmatrix} \quad (3.1-39)$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_{11} & 2\Phi_{100}^*(\theta) & Z_{13} & \cdots & Z_{136} \\ Z_2 + Z_{21} & 2\Phi_{200}^*(\theta) & Z_{23} & \cdots & Z_{236} \\ Z_3 + Z_{31} & 2\Phi_{300}^*(\theta) & Z_{33} & \cdots & Z_{336} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{36} + Z_{361} & 2\Phi_{3600}^*(\theta) & Z_{363} & \cdots & Z_{3636} \end{bmatrix} \quad (3.1-40)$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_{11} & Z_{12} & 2\Phi_{100}^*(\theta) & \cdots & Z_{136} \\ Z_2 + Z_{21} & Z_{22} & 2\Phi_{200}^*(\theta) & \cdots & Z_{236} \\ Z_3 + Z_{31} & Z_{32} & 2\Phi_{300}^*(\theta) & \cdots & Z_{336} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{36} + Z_{361} & Z_{362} & 2\Phi_{3600}^*(\theta) & \cdots & Z_{3636} \end{bmatrix} \quad (3.1-41)$$

.....

$$D_{36} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & \Phi_{100}^*(\theta) \\ Z_2 + Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \cdots & \Phi_{200}^*(\theta) \\ Z_3 + Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \cdots & \Phi_{300}^*(\theta) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{36} + Z_{361} & Z_{362} & Z_{363} & \cdots & \Phi_{3600}^*(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.1-43)$$

$$D = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & Z_{136} \\ Z_2 + Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \cdots & Z_{236} \\ Z_3 + Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \cdots & Z_{336} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{36} + Z_{361} & Z_{362} & Z_{363} & \cdots & Z_{3636} \end{bmatrix} \quad (3.1-44)$$

所以, 解得

$$\begin{aligned}
 U_1(0) &= \frac{D_1}{D} \\
 U_2(0) &= \frac{D_2}{D} \\
 U_3(0) &= \frac{D_3}{D} \\
 &\vdots \\
 U_{36}(0) &= \frac{D_{36}}{D}
 \end{aligned}
 \tag{3.1-45}$$

于是反射系数为,

$$r_{nm} = \frac{\alpha_{00}}{\alpha_{nm}} \delta_{0m} \delta_{0n} - (j\alpha_{nm})^{-1} R_{\Sigma} \sum_i \Phi_{inm}^*(\theta) U_i(0)
 \tag{3.1-46}$$

当结构的尺寸参数 $(\Lambda_x, \Lambda_y, b_x, b_y, h_i)$ 、入射波的入射角度 (φ, θ) 、入射波的频率 (ω) 已知时, 材料(结构)的反射系数 r_{nm} 就已知了。

3.2 亥姆霍兹共鸣器的输入阻抗

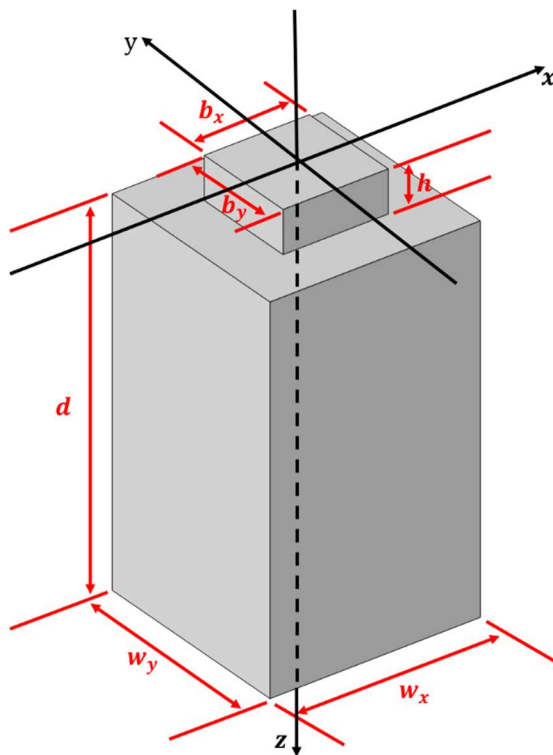


图 3.2-1 亥姆霍兹共鸣器的相关参数

图 3.2-1 中, $z=0$ 处为亥姆霍兹共鸣器的开口, $0 \leq z \leq h$ 处为亥姆霍兹共鸣器的颈部, $h \leq z \leq h+d$ 处为亥姆霍兹共鸣器的腔体部分。

在腔体内, 声压展开形式为⁶,

$$p(x, y, z) = \sum_n \sum_m \phi_n(x) \phi_m(y) \left[A_{nm} e^{j\sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}(z-h)} + B_{nm} e^{-j\sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}(z-h-d)} \right] \quad (3.2-1)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} \phi_n(x) &= \sqrt{2 - \delta_{0n}} \cos\left(k_n \left(x + \frac{w_2 x}{2}\right)\right), k_n = \frac{n\pi}{w_x} \\ \phi_m(y) &= \sqrt{2 - \delta_{0m}} \cos\left(k_m \left(y + \frac{w_2 y}{2}\right)\right), k_m = \frac{m\pi}{w_y} \end{aligned} \right\} \quad (3.2-2)$$

又有,

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.2-3)$$

所以,

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\rho c k} \sum_n \sum_m \sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2} \phi_n(x) \phi_m(y) (A_{nm} e^{j\sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}(z-h)} - B_{nm} e^{-j\sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}(z-h-d)}) \quad (3.2-4)$$

因为在 $z = h+d$ 处为刚性界面, 于是在 $z = h+d$ 处质点速度为 0。即,

$$u(x, y, h+d) = 0 \quad (3.2-5)$$

那么, 联立 (3.2-4) (3.2-5), 可得,

$$A_{nm} e^{j\sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}} - B_{nm} = 0 \quad (3.2-6)$$

考虑 z 轴上 $z = h$ 处 Hemholtz 共鸣器界面,

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=h} = jk \rho c u(x, y, z) \Big|_{z=h} = jk \rho c \frac{U(x, y, z) \Big|_{z=h}}{b_x b_y} \quad (3.2-7)$$

在此分界面上进行积分, 得

⁶ 详见参考: 杜功焕, 朱哲民, 龚秀芳, 声学基础. 第 3 版. 南京: 南京大学出版社, 2012. 183-185

$$\int_{-\frac{w_y}{2}}^{\frac{w_y}{2}} \int_{-\frac{w_x}{2}}^{\frac{w_x}{2}} \sum_p \sum_q j\sqrt{k^2 - k_p^2 - k_q^2} \phi_p(x)\phi_q(y) (A_{nm} - e^{j\sqrt{k^2 - k_p^2 - k_q^2}d}) \phi_n(x)\phi_m(y) dx dy$$

$$= \int_{-\frac{b_y}{2}}^{\frac{b_y}{2}} \int_{-\frac{b_x}{2}}^{\frac{b_x}{2}} jk\rho c \frac{U(z)|_{z=h}}{b_x b_y} \phi_n(x)\phi_m(y) dx dy$$
(3.2-8)

解得,

$$w_x w_y \sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2} (A_{nm} - B_{nm} e^{j\sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}d}) = \frac{k\rho c}{b_x b_y} U(z)|_{z=h} \int_{-\frac{b_y}{2}}^{\frac{b_y}{2}} \int_{-\frac{b_x}{2}}^{\frac{b_x}{2}} \phi_n(x)\phi_m(y) dx dy$$
(3.2-9)

可整理出 A_{nm} 和 B_{nm} 的关系, 即为

$$A_{nm} - B_{nm} e^{j\sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}d} = \frac{1}{w_x w_y \sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}} \frac{k\rho c}{b_x b_y} U(z)|_{z=h} \int_{-\frac{b_y}{2}}^{\frac{b_y}{2}} \int_{-\frac{b_x}{2}}^{\frac{b_x}{2}} \phi_n(x)\phi_m(y) dx dy$$
(3.2-10)

联立 (3.2-10) 和 (3.2-6), 可得

$$A_{nm} + B_{nm} e^{j\sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}d} = \frac{1 + e^{2j\sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}d}}{1 - e^{2j\sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}d}} \frac{1}{w_x w_y \sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}} \frac{k\rho c}{b_x b_y} U(z)|_{z=h} \int_{-\frac{b_y}{2}}^{\frac{b_y}{2}} \int_{-\frac{b_x}{2}}^{\frac{b_x}{2}} \phi_n(x)\phi_m(y) dx dy$$
(3.2-11)

那么,

$$p(x, y, h) = \sum_n \sum_m \phi_n(x)\phi_m(y) \frac{1 + e^{2j\sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}d}}{1 - e^{2j\sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}d}} \frac{1}{w_x w_y \sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}} \frac{k\rho c}{b_x b_y} U(z)|_{z=h} \int_{-\frac{b_y}{2}}^{\frac{b_y}{2}} \int_{-\frac{b_x}{2}}^{\frac{b_x}{2}} \phi_n(x)\phi_m(y) dx dy$$
(3.2-12)

考虑到在 z 轴方向上声压可平均,

$$\bar{p}(h) = \sum_n \sum_m \frac{1}{w_x w_y \sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}} \frac{k\rho c}{(b_x b_y)^2} U(z)|_{z=h} \left(\int_{-\frac{b_y}{2}}^{\frac{b_y}{2}} \int_{-\frac{b_x}{2}}^{\frac{b_x}{2}} \phi_n(x)\phi_m(y) dx dy \right)^2 \frac{1 + e^{2j\sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}d}}{1 - e^{2j\sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}d}}$$
(3.2-13)

根据声阻抗的定义 $Z_a = \frac{\bar{p}}{U}$ ，考虑到高阶波情况下亥姆霍兹共鸣器喉管口处的声阻抗，

$$Z_a|_{z=h} = \frac{\bar{p}(h)}{U(z)|_{z=h}} = \sum_n \sum_m \frac{1}{w_x w_y \sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}} \frac{k \rho c}{(b_x b_y)^2} \left(\int_{-\frac{b_y}{2}}^{\frac{b_y}{2}} \int_{-\frac{b_x}{2}}^{\frac{b_x}{2}} \phi_n(x) \phi_m(y) dx dy \right)^2 \frac{1 + e^{2j\sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}d}}{1 - e^{2j\sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}d}} \quad (3.2-14)$$

3.3 亥姆霍兹共鸣器周期界面

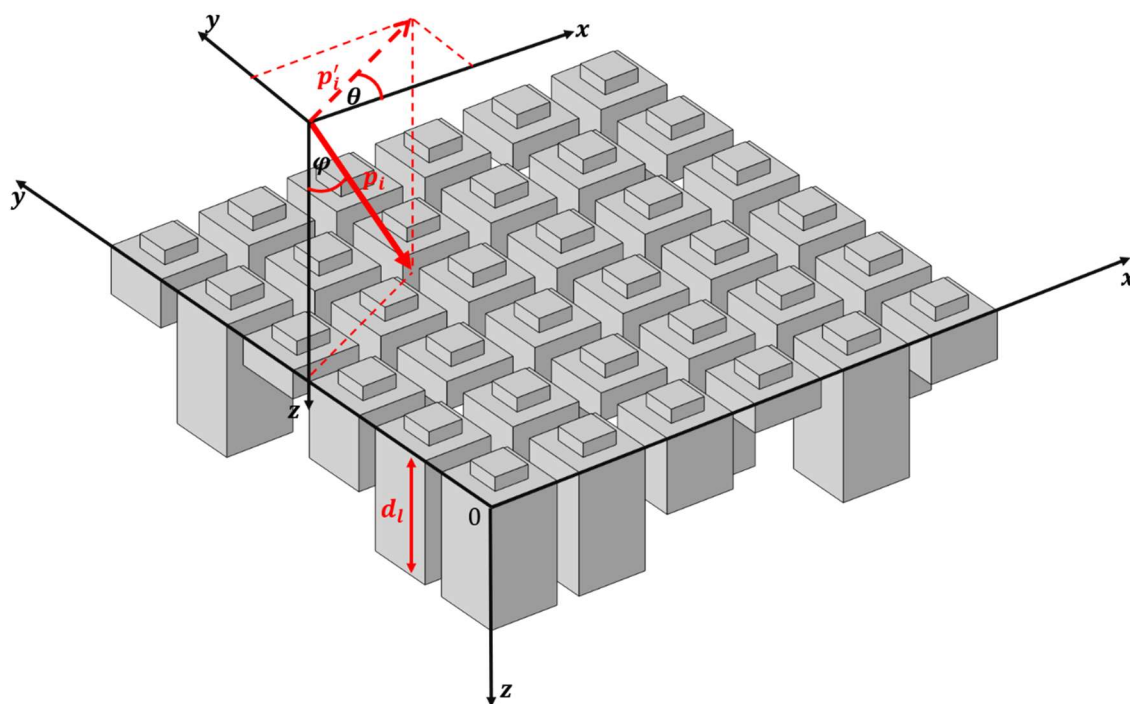


图 3.3-1 亥姆霍兹共鸣器周期界面

亥姆霍兹共鸣器周期界面反射系数推导过程与梳状周期界面反射系数得推导过程基本一致。一致的部分在于，求解思路都是通过计算开口处的声压和体积速度来反射系数的表达式；而不同点，就在于两种周期界面的自阻抗及互阻抗是不同的。所以，关于一致的部分，这里笔者就不再赘述；同时，着重介绍一下通过亥姆霍兹共鸣器周期界面的自阻抗和互阻抗求解反射系数的这一部分内容。

该种周期性界面的最小结构单元是亥姆霍兹共鸣器。为了简化计算，单个亥姆霍兹共鸣器之间不同点仅仅在于腔体高度的不同。这里每个亥姆霍兹共鸣器腔体高度为 d_l ，其中 $l=1,2,3,\dots,36$ 。

由“3.1 梳状周期界面”部分内容，我们可以得到，

第 l 个亥姆霍兹共鸣器开口处的平均声压为，

$$\bar{p}_l(0) = 2\Phi_{lnm}^*(\theta) - \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \sum_i \Phi_{lnm}^*(\theta) U_i(\theta), \quad (3.3-1)$$

$$l = 1, 2, 3, \dots, 36$$

同理，

$$\begin{aligned} 2\Phi_{100}^*(\theta) - \bar{p}_1(0) &= Z_{11}U_1(0) + Z_{12}U_2(0) + \dots + Z_{136}U_{36}(0) \\ 2\Phi_{200}^*(\theta) - \bar{p}_2(0) &= Z_{21}U_1(0) + Z_{22}U_2(0) + \dots + Z_{236}U_{36}(0) \\ 2\Phi_{300}^*(\theta) - \bar{p}_3(0) &= Z_{31}U_1(0) + Z_{32}U_2(0) + \dots + Z_{336}U_{36}(0) \\ &\vdots \\ 2\Phi_{3600}^*(\theta) - \bar{p}_{36}(0) &= Z_{361}U_1(0) + Z_{362}U_2(0) + \dots + Z_{3636}U_{36}(0) \end{aligned} \quad (3.3-2)$$

其中，

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \Phi_{1nm}^*(\theta) \Phi_{1nm}(\theta) \\ Z_{12} &= \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \Phi_{1nm}^*(\theta) \Phi_{2nm}(\theta) \\ &\vdots \\ Z_{136} &= \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \Phi_{1nm}^*(\theta) \Phi_{36nm}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.3-3)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_{21} &= \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \Phi_{2nm}^*(\theta) \Phi_{1nm}(\theta) \\ Z_{22} &= \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \Phi_{2nm}^*(\theta) \Phi_{2nm}(\theta) \\ &\vdots \\ Z_{236} &= \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \Phi_{2nm}^*(\theta) \Phi_{36nm}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.3-4)$$

$$\dots\dots \quad (3.3-5)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_{361} &= \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \Phi_{36nm}^*(\theta) \Phi_{1nm}(\theta) \\ Z_{362} &= \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \Phi_{36nm}^*(\theta) \Phi_{2nm}(\theta) \\ &\vdots \\ Z_{3636} &= \sum_n \sum_m (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \Phi_{36nm}^*(\theta) \Phi_{36nm}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.3-6)$$

与梳状周期界面相比，亥姆霍兹共鸣器周期界面的自阻抗就不再是

$Z_i = \frac{j\rho c}{b_x b_y \tan(kh_i)}$, 而是,

$$Z_l = \frac{\rho c}{\sigma} \frac{Z_{al} - j \frac{\rho c}{\sigma} \tan(kh)}{\frac{\rho c}{\sigma} - j Z_{al} \tan(kh)} \quad (3.3-7)$$

那么, 参考(3.2-14), 每个亥姆霍兹共鸣器在 $z = h$ 面上的阻抗为,

$$Z_{al} = \frac{\bar{p}(h)}{U(z)|_{z=h}} = \sum_n \sum_m \frac{1}{w_x w_y \sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2}} \frac{k \rho c}{(b_x b_y)^2} \left(\int_{\frac{b_y}{2}}^{\frac{b_y}{2}} \int_{\frac{b_x}{2}}^{\frac{b_x}{2}} \phi_n(x) \phi_m(y) dx dy \right)^2 \frac{1 + e^{2j\sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2} d_i}}{1 - e^{2j\sqrt{k^2 - k_n^2 - k_m^2} d_i}} \quad (3.3-8)$$

同样是需要求解方程组,

$$\begin{aligned} 2\Phi_{100}^*(\theta) &= (Z_{11} + Z_1)U_1(0) + Z_{12}U_2(0) + \cdots + Z_{136}U_{36}(0) \\ 2\Phi_{200}^*(\theta) &= (Z_{21} + Z_2)U_1(0) + Z_{22}U_2(0) + \cdots + Z_{236}U_{36}(0) \\ 2\Phi_{300}^*(\theta) &= (Z_{31} + Z_3)U_1(0) + Z_{32}U_2(0) + \cdots + Z_{336}U_{36}(0) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.3-9)$$

$$2\Phi_{3600}^*(\theta) = (Z_{361} + Z_{36})U_1(0) + Z_{362}U_2(0) + \cdots + Z_{3636}U_{36}(0)$$

$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & Z_{136} \\ Z_2 + Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \cdots & Z_{236} \\ Z_3 + Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \cdots & Z_{336} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{36} + Z_{361} & Z_{362} & Z_{363} & \cdots & Z_{3636} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(0) \\ U_2(0) \\ U_3(0) \\ \vdots \\ U_{36}(0) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \Phi_{100}^*(\theta) \\ \Phi_{200}^*(\theta) \\ \Phi_{300}^*(\theta) \\ \vdots \\ \Phi_{3600}^*(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.3-10)$$

其中,

$$D_1 = \begin{bmatrix} 2\Phi_{100}^*(\theta) & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & Z_{136} \\ 2\Phi_{200}^*(\theta) & Z_{22} & Z_{23} & \cdots & Z_{236} \\ 2\Phi_{300}^*(\theta) & Z_{32} & Z_{33} & \cdots & Z_{336} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\Phi_{3600}^*(\theta) & Z_{362} & Z_{363} & \cdots & Z_{3636} \end{bmatrix} \quad (3.3-11)$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_{11} & 2\Phi_{100}^*(\theta) & Z_{13} & \cdots & Z_{136} \\ Z_2 + Z_{21} & 2\Phi_{200}^*(\theta) & Z_{23} & \cdots & Z_{236} \\ Z_3 + Z_{31} & 2\Phi_{300}^*(\theta) & Z_{33} & \cdots & Z_{336} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{36} + Z_{361} & 2\Phi_{3600}^*(\theta) & Z_{363} & \cdots & Z_{3636} \end{bmatrix} \quad (3.3-12)$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_{11} & Z_{12} & 2\Phi_{100}^*(\theta) & \cdots & Z_{136} \\ Z_2 + Z_{21} & Z_{22} & 2\Phi_{200}^*(\theta) & \cdots & Z_{236} \\ Z_3 + Z_{31} & Z_{32} & 2\Phi_{300}^*(\theta) & \cdots & Z_{336} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{36} + Z_{361} & Z_{362} & 2\Phi_{3600}^*(\theta) & \cdots & Z_{3636} \end{bmatrix} \quad (3.3-13)$$

$$\dots\dots \quad (3.3-14)$$

$$D_{36} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & \Phi_{100}^*(\theta) \\ Z_2 + Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \cdots & \Phi_{200}^*(\theta) \\ Z_3 + Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \cdots & \Phi_{300}^*(\theta) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{36} + Z_{361} & Z_{362} & Z_{363} & \cdots & \Phi_{3600}^*(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.3-15)$$

$$D = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & Z_{136} \\ Z_2 + Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \cdots & Z_{236} \\ Z_3 + Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \cdots & Z_{336} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{36} + Z_{361} & Z_{362} & Z_{363} & \cdots & Z_{3636} \end{bmatrix} \quad (3.3-16)$$

所以, 可得

$$\begin{aligned} U_1(0) &= \frac{D_1}{D} \\ U_2(0) &= \frac{D_2}{D} \\ U_3(0) &= \frac{D_3}{D} \\ &\vdots \\ U_{36}(0) &= \frac{D_{36}}{D} \end{aligned} \quad (3.3-17)$$

于是亥姆霍兹共鸣器周期界面的反射系数为,

$$r_{nm} = \frac{\alpha_{00}}{\alpha_{nm}} \delta_{0m} \delta_{0n} - (j\alpha_{nm})^{-1} R_\Sigma \sum_i \Phi_{inm}^*(\theta) U_i(0) \quad (3.3-18)$$

同样地, 当结构的尺寸参数 $(\Lambda_x, \Lambda_y, b_x, b_y, h_i)$ 、入射波的入射角度 (φ, θ) 、入射波的频率 (ω) 已知时, 材料(结构)的反射系数 r_{nm} 就已知了。

4 数值仿真与实验

在上文中，笔者详细讨论了如何通过 $z = 0$ 界面上的声压连续和声速连续来推导出梳状周期界面和亥姆霍兹共鸣器周期界面的反射系数。但是推导过程较为繁琐，内容十分抽象，不便于读者理解。在这一章节中，笔者将对上述模型进行数值计算和实验研究。但是，由于三维周期结构的过于复杂，便于实际应用但是不便于对其物理概念的理解。那么，在对界面结构进行数值计算和实验研究中，笔者均采用二维结构（二维亥姆霍兹共鸣器周期结构）进行。

4.1 数值计算

在定量分析的时候，三维亥姆霍兹共鸣器周期界面存在多个待讨论的参数。这些参数使得对其的数值计算十分复杂。这种复杂性，一方面可以使得理论分析更加接近于实际情况；但另一方面，不便于建立对三维亥姆霍兹共鸣器周期界面物理概念的清晰认识。所以，在分析三维亥姆霍兹共鸣器周期界面物理实质的层面，是完全可以简化为二维亥姆霍兹共鸣器周期界面的。

将图 3.1-1 简化为二维周期界面结构，同时，从 $x-z$ 面着手研究。

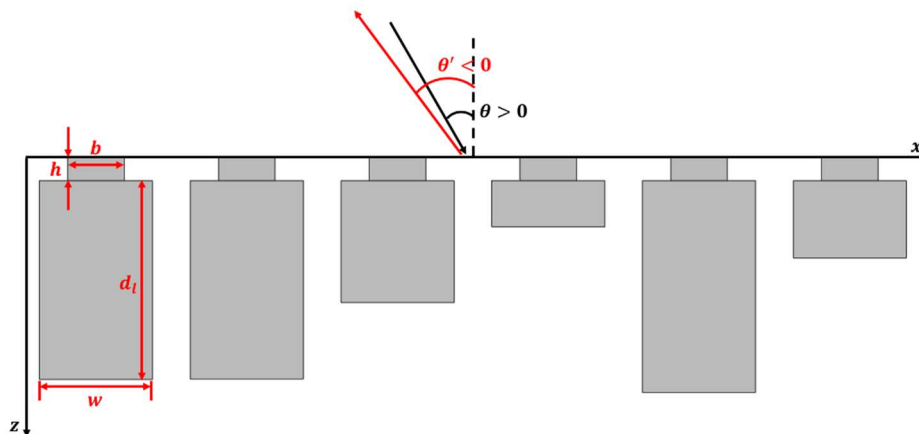


图 4.1-1 简化后的二维亥姆霍兹共鸣器周期界面

关于反射系数的推导已经在“3 声学模型”章节详细给出，这里简略描述。

易得，入射平面波，

$$p_i = e^{jk \sin \theta x + jk \cos \theta z} \quad (4.1-1)$$

同样，由 Floquet 周期理论，可以得到反射波的形式，

$$p_r = \sum_m r_m e^{jk\beta_m x + k\alpha_m z} \quad (4.1-2)$$

其中，

$$\begin{aligned} k\beta_m &= k \sin \theta + 2\pi \frac{m}{\Lambda} = k \sin \theta'_m \\ j\alpha_m &= k \sqrt{1 - \beta_m^2} \\ n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (4.1-3)$$

参考 3.1 梳状周期界面，即利用 $z = 0$ 界面上的声压连续和声速连续，可以得到，

$$\begin{aligned} Z_l U_l(0) + \sum_i Z_{li} U_i(0) &= 2e^{jkx_l \sin \theta_l} \Phi_0^*(\theta) \\ i &= 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{aligned} \quad (4.1-4)$$

其中， x_l 是第 l 处亥姆霍兹共鸣器管口的位置； Z_l 是第 l 个亥姆霍兹共鸣器管口处的自阻抗；

$$\Phi_m(\theta) = \frac{2}{b} \int_{\frac{2}{b}}^{\frac{2}{b}} e^{-jk\beta_m x} dx \quad (4.1-5)$$

Z_{li} 表示管口之间的互阻抗，

$$Z_{li} = \sum_m (j\alpha_m)^{-1} R_\Sigma e^{jk\beta_m(x_l - x_i)} |\Phi_l(\theta)|^2 \quad (4.1-6)$$

那么，容易得到反射系数的表达式，

$$r_m = \delta_{0m} - (j\alpha_m)^{-1} \Phi_m(\theta) R_\Sigma \sum_i U_i(0) e^{-jk\beta_m x_i} \quad (4.1-7)$$

r_0 表示的物理实质是常规反射。那么，在研究背向反射中，就要令常规反射不发生。通过这样的设置，得到相关信息在进行接下来的研究。

令，

$$r_0 = 0 \quad (4.1-8)$$

得到，

$$\Phi_0^*(\theta) = (j\alpha)^{-1} |\Phi_0(\theta)|^2 R_\Sigma \sum_i U_i(0) e^{-jk \sin \theta x_i} \quad (4.1-9)$$

将 (4.1-9) 代入 (4.1-4)，得

$$Z_{ii}U_i(0) + \sum_i X_{ii}U_i(0) = 0 \quad (4.1-10)$$

其中,

$$X_{ii} = \sum_m (1 - 2\delta_{0m})(j\alpha_m)^{-1} R_\Sigma e^{jk\beta_m(x_i - x_i)} |\Phi_m(\theta)|^2 \quad (4.1-11)$$

由于(4.1-10)存在非零解,所以通过上式就可以得到在特定入射角度和入射频率下巴拉格散射点。这种布拉格点实质上就是多个亥姆霍兹共鸣器局域共振耦合的物理结果。在后文中,会对这个式子做数值计算,进而对其物理本质有更加清晰的认识和理解。

对于单个亥姆霍兹共鸣器,(4.1-10)可简化为,

$$Z_1 + \sum_m \frac{R_\Sigma}{j\alpha_m} |\Phi_m(\theta)|^2 - \frac{2R_\Sigma |\Phi_0(\theta)|^2}{\cos\theta} = 0 \quad (4.1-12)$$

通过(4.1-12)我们得到的反射效果与入射角度及入射频率的关系,即为布拉格线。关于其的物理意义及数值计算,会在下文中做进一步的分析。

下面通过数值计算来进一步分析讨论反射系数 r_m 。

首先,考虑到计算的复杂度和现有的实验条件,我们仅仅是在 3.5kHz 到 6.5kHz 的范围内来研究问题。同时,通过上文分析,我们很清楚不同周期界面结构参数会产生不同的背向反射效果。那么,在 3.5kHz 到 6.5kHz 范围内,何种界面结构参数反射效果最好呢?(即,可在宽带和宽角度内实现背向反射。)所以,通过粒子群的优化算法^[28-32],我们找到了这样一组参数⁷:

$$\begin{aligned} \Lambda_x = \Lambda_y = \Lambda &= 80mm \\ b &= 5mm, h = 2mm \\ d_1 &= 0.2197\Lambda, d_2 = 0.2190\Lambda, d_3 = 0.1346\Lambda \\ d_4 &= 0.0508\Lambda, d_5 = 0.2339\Lambda, d_6 = 0.0854\Lambda \end{aligned} \quad (4.1-13)$$

然后,在这组界面结构参数的基础上,我们来研究所设计亥姆霍兹共鸣器周期界面背向反射的效果。

参考(4.1-3),入射波的角度 θ 和反射波的角度 θ' 满足以下关系,

⁷ 请各位读者不要拘泥于粒子群算法,因为该章节侧重于物理概念的认识。而粒子群算法仅仅是一个获得参数的工具。

$$k\beta_m = k \sin \theta + \frac{2\pi m}{\Lambda} = k \sin \theta' \quad (4.1-14)$$

同时，为了保证上式有意义，须满足，

$$-1 \leq \sin \theta' \leq 1 \quad (4.1-15)$$

即，

$$-1 \leq \sin \theta + m \frac{\lambda}{\Lambda} \leq 1 \quad (4.1-16)$$

得到，

$$m = 0, \pm 1 \quad (4.1-17)$$

接下在计算 $|r_m|^2 \frac{\cos \theta'_m}{\cos \theta}$ 随入射波频率及入射波角度变化变化，

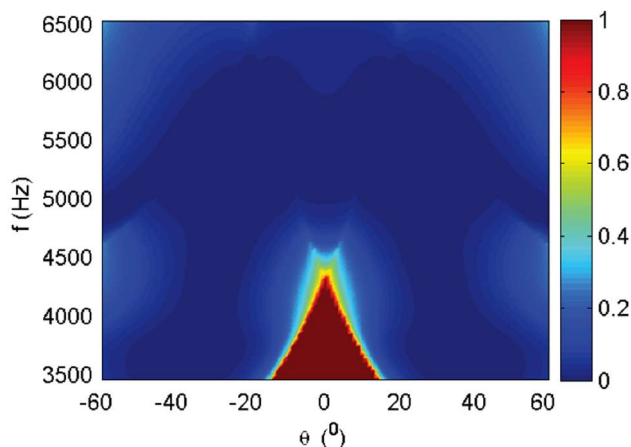


图 4.1-2 m=0 时的数值计算结果

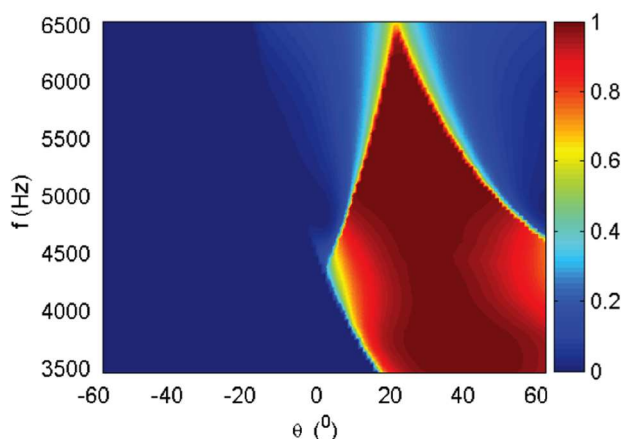


图 4.1-3 m=0,-1 时的数值计算结果

分析“图 4.1-2 m=0 时的数值计算结果”，在我们物理概念中认识 $r_0 = 0$ 的

时候仍然存在背向反射（图中的红褐色部分）。这部分红褐色并不代表真正意义上的背向反射，之所以发生主要来源于这两方面原因：一方面，红褐色发所在位置正好是入射波 $\theta = 0$ 的附近，在这一位置，背向反射与镜像反射刚好重合，并不能算是真正意义上的背向反射；另一方面，反射系数在 $m = 0$ 阶的时候，所具有的能量非常小，能量大多集中在 $m = \pm 1$ 阶。

通过“图 4.1-3 $m=0, -1$ 时的数值计算结果”我们很明显地看到声波在全频段上可以实现背向反射，而且在某些频段可以实现宽角度的背向反射。同时，通过两个计算结果的对比，我们完全能够验证上文提到的“能量主要集中在 $m = \pm 1$ 阶，而非 $m = 0$ 阶”。

在上文中，我们分析提到了“布拉格线”和“布拉格点”，而这两者对于宽带背向反射又是至关重要的。正是由于布拉格线的存在，使得背向反射有了发生的可能^[16]；同时，正式由于布拉格点的存在，使得宽带范围内背向反射成为可能^[33-36]。而这些的物理实质是居于共振耦合。

所以，为了更好地描述这样的物理概念，我们将“图 4.1-2 $m=0$ 时的数值计算结果”的因变量取对数运算，以便于更好地作图、观察、分析。

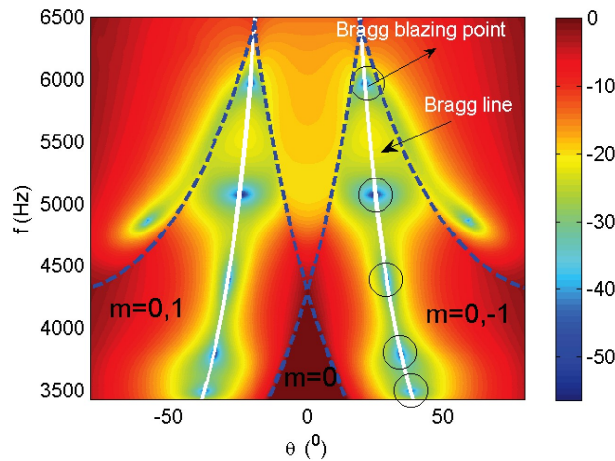


图 4.1-4 对 $m=0$ 数值计算取对数运算之后的结果

参考(4.1-11) (4.1-12)，我们得到了反射系数随入射角和入射频率的关系，就表达为图中的布拉格线和布拉格点。这是由于布拉格线和布拉格点的存在，背向反射能够在宽带范围内得以实现。而这样效果的物理实质却又不得不归功于居于共振耦合。

为了进一步理解宽带背向反射的物理实质在于局域共振耦合，我们还可以从

分析周期亥姆霍兹共鸣器反射相位入手。

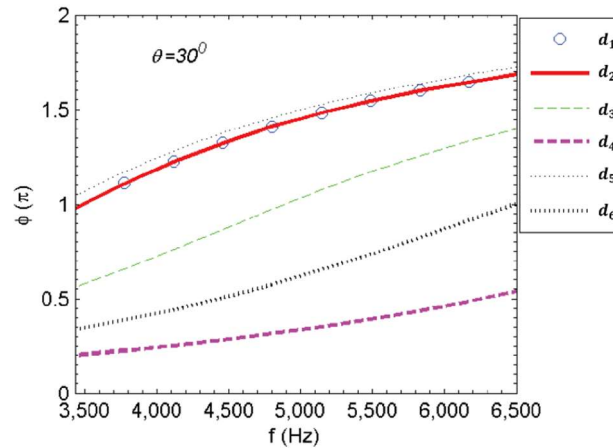


图 4.1-5 周期亥姆霍兹共鸣器反射相位随频率的变化关系

通过对上图计算结果进行分析，我们基本可以得到亥姆霍兹共鸣器开口处的反射相位线性依赖于频率，也就是说相位差随频率基本不变。正如前文所提到的，背向反射的物理本质在于干涉，而干涉的物理本质又在波束之间的相位差。换言之，要想有效控制背向反射，就必须能够有效控制相位差。在利用局域共振耦合物理机制形成的周期亥姆霍兹共鸣器界面上，相位线性依赖于频率的变化，相位差随频率基本不变。在这种情况下，如果在频率范围内的某个频率上实现了背向反射，也就意味着在整个频率范围内可以实现背向反射。所以，通过对反射相位随频率变化的讨论，宽带背向反射的物理本质（局域共振耦合的物理机制）更加清晰。

4.2 实验研究

在前文中，我们通过粒子群算法找到了在 3.5kHz 到 6.5kHz 范围内最优化的周期亥姆霍兹界面结构参数；然后，通过理论推导进一步认识了宽带背向反射的物理本质；最后，通过数值计算研究了在该组结构参数下，背向反射的情况。

以下内容还仅限于理论和仿真层面，下面笔者从实验验证的角度来做进一步的研究。

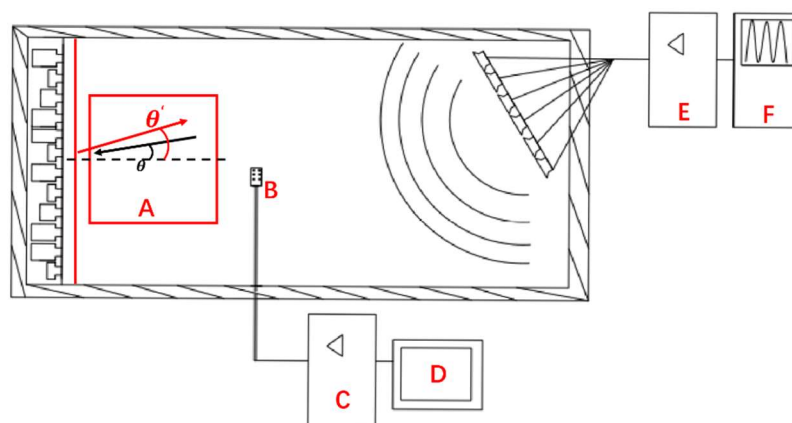


图 4.2-1 实验装置示意图

如上图所示，在现有的实验条件下，背向反射的验证实验在矩形波导的环境下进行。扬声器阵列、麦克风、背向反射结构均位于两个波导板之间。而波导板的周围（上图中斜线所示）则用超细玻璃棉填充。这样做，一方面为了防止周围环境噪声的干扰；另一方面，是为了尽可能创造一个自由边界条件，使得仅考虑直达波，减少反射波的干扰。

A 为矩形声压采集区域，B 为麦克风传声器，C 为放大器，D 为信号采集器，E 为功率放大器，F 为信号发生器：以上就是整个实验的基本组成。整个实验流程为：信号发生器产生我们想要的信号波形；信号波形经过功率放大器被放大功率；被放大的信号通过扬声器，实现电信号到声信号的转换；在波导环境中声信号低于矩形波导的截止频率，那么在可以认为是平面波⁸；声波入射到周期亥姆霍兹共鸣器界面上被反射；反射声波被传声器检测到，这时候，声学信号被转换为电信号；电信号经过放大器被放大；最后，经过放大的信号被信号采集器收集起来。

“图 4.2-1 实验装置示意图”中黑色箭头表示入射波，与法线的夹角为 θ ；红色箭头为反射波，反射波方向与法线夹角为 θ' 。同时，在靠近反射界面位置有一条红线。通过采集红线位置上的数据，我们做空间波束形成确定发射波的方向，结果如下：

⁸ 波导中的声波低于矩形波导截止频率，仍然不是平面波，而是柱面波。即在平行于波导板方向上为平面波。而这里为了方便，直接简单描述为平面波。希望读者不要在这里纠结。

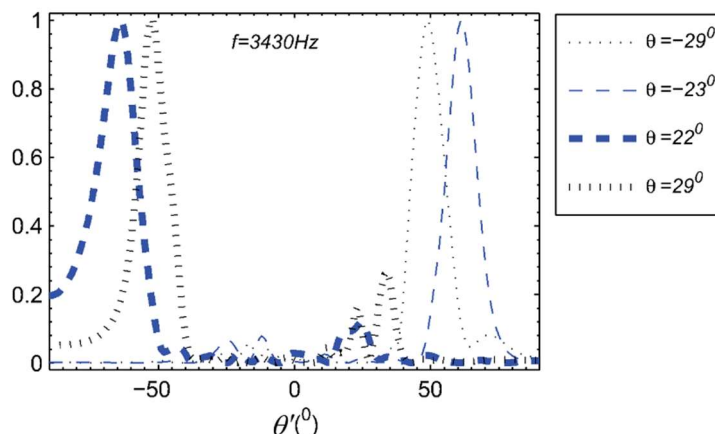


图 4.2-2 入射波为 3430Hz 空间波束形成结果

当入射波的频率为 3430Hz 的时候，背向反射波随不同入射波的角度变化情况。虽然，在镜像反射方向上仍存在部分反射波的能量，但这些能量与背向反射的能量峰值相比显然是非常小的。所以说，在实验误差允许的范围内，入射波频率为 3430Hz 的背向反射得以验证。

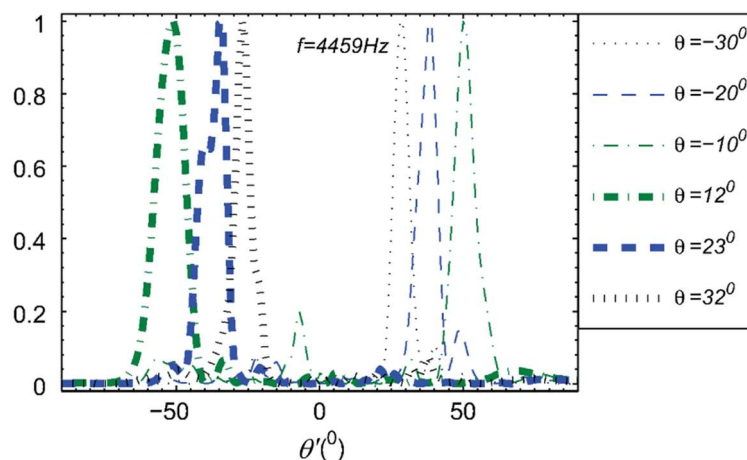


图 4.2-3 入射波为 4459Hz 空间波束形成结果

当入射波的频率为 3430Hz 的时候，背向反射波随不同入射波的角度变化情况。虽然，在镜像反射方向或者其他方向上仍存在部分反射波的能量，但这些能量与背向反射的能量峰值相比显然是非常小的。所以说，在实验误差允许的范围内，入射波频率为 3430Hz 的背向反射得以验证。

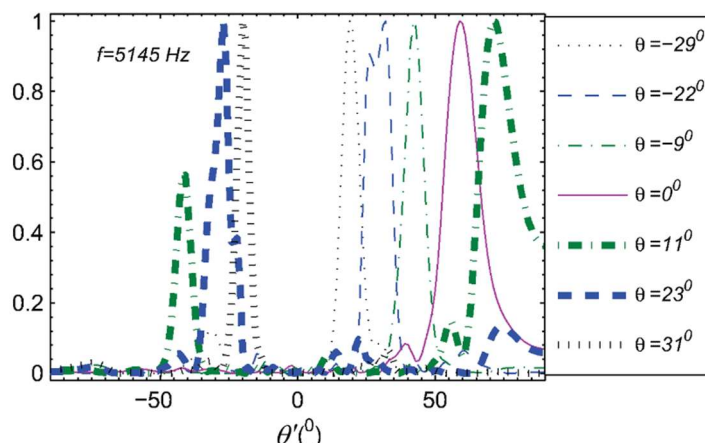


图 4.2-4 入射波为 5154Hz 波束形成结果

当入射波的频率为 5145Hz 时，背向反射的方向随入射波入射角度的变化关系，如上图示。在入射角为 11° 的时候，反射波除了在背向反射方向有很强的能量分布，在其他方向仍存在较强的能量分布。这个同样也是符合理论计算的，因为通过参考“图 4.1-3 $m=0, -1$ 时的数值计算结果”，我们发现 $f = 5145\text{Hz}, \theta = 11^\circ$ 是刚好处于边缘地带，所以能量除了在背向反射方向会存有分布外，也会在其他方向存有分布。

上文通过取入射波的频率 $f = 3430\text{Hz}, 4459\text{Hz}, 5145\text{Hz}$ 来分析验证周期亥姆霍兹共鸣器界面对于背向反射的效果。那么，选取的这几个特定入射角度和特定入射波频率的实验效果和理论计算的误差有多少呢？并且这几组实验在验证界面的背向反射能否具有代表性呢？

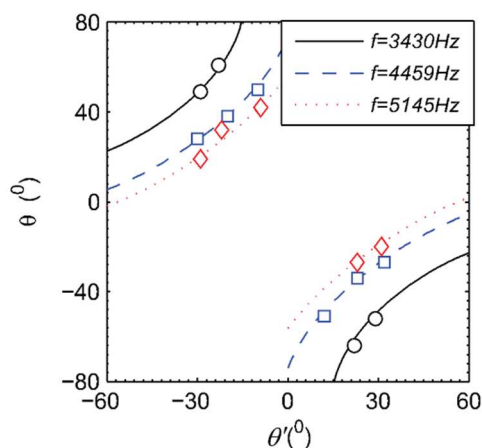


图 4.2-5 实验误差及代表性分析

上图的实线及虚线部分表征了理论计算中背向反射应有的效果；而菱形、三角形、正方形表征了实验测量值所在的位置。虽然图形与图形存在一定的误差，但是误差还是很小的，能够保证图形基本处在图线上。所以，我们在上述实验中所取的频率和角度的实验误差还是很小的。同时，上述几组实验能够表征多少理论计算在“图 4.2-5 实验误差及代表性分析”中也就一目了然了。

为了进一步对这种背向反射现象的直观理解，在入射波 $f = 4459\text{Hz}$, $\theta = \pm 20^\circ$ 的条件下，我们对 A 矩形区域的整个声压值进行了测量。

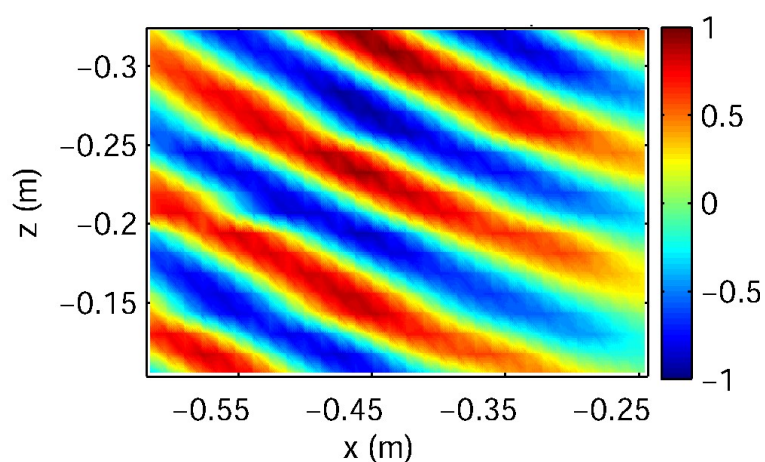


图 4.2-6 入射波 $\theta = -20^\circ$

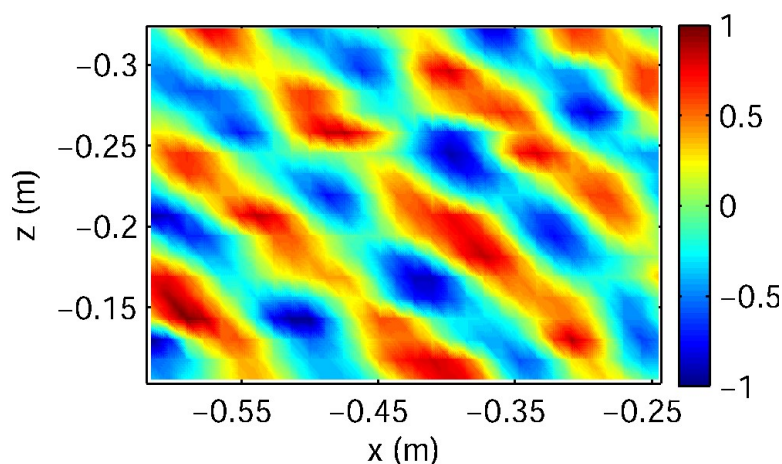


图 4.2-7 反射波 $\theta' = 36^\circ$

通过上图可以直观认识到周期亥姆霍兹共鸣器界面对于声波操控实现声波背向反射的效果。由于实验精度有限，反射波的测量过程中存在一些不精确，表现在结果图上就是“高低起伏”。

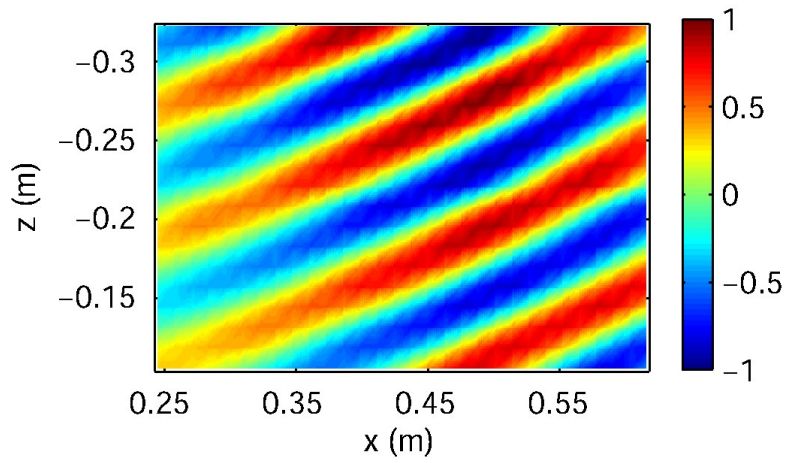


图 4.2-8 入射波 $\theta = 20^\circ$

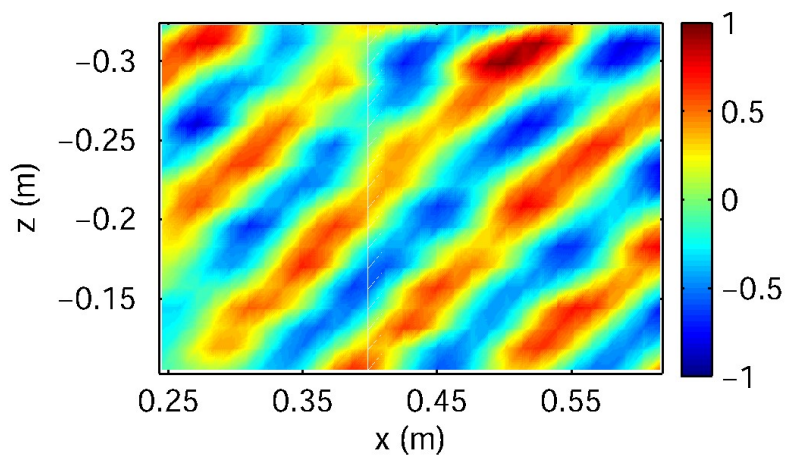


图 4.2-9 反射波 $\theta' = -40^\circ$

5 应用研究

在上文中,我们阐述了如何利用局域共振耦合来设计周期亥姆霍兹共鸣器界面结构,并且通过数值计算和实验研究解释了周期亥姆霍兹共鸣器界面能够实现背向反射的物理实质。

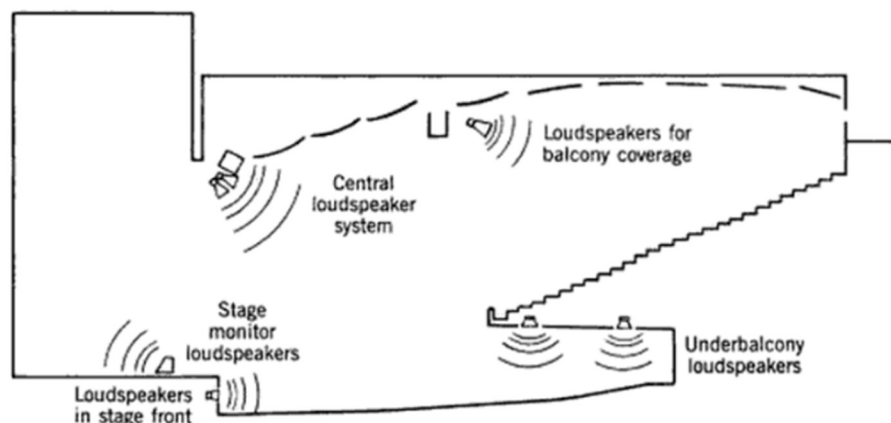
通过居于共振耦合实现背向反射,这种设计声学超材料的范畴。近年来,声学超材料的发展势头十分迅猛。其主要原因在于,声学超材料属于多个研究方向的交叉,例如固体物理、声子晶体、材料科学、计算声学、理论力学等等。所以,短时间内涌现了大量的声学超材料的成果。但是这些成果仅仅局限在理论层面,极少数成果能够被转化为产品或者应用。其主要原因在于,理论到应用转换的复杂性,这对于技术可言人员的要求比较高:一方面要具备清晰的物理概念和物理图像;另一方面要对工程技术需求有着敏锐的嗅觉。

所以,在接下来的内容中,笔者尝试打通理论和应用的壁垒。使得科学研究能够更好地服务于社会的发展和人们的需求,以求科学更加有温度。

5.1 应用背景

在音乐表演中,电声扩声系统充当着极其重要的角色^[37-39]。从音响系统所服务的对象上,可以将舞台表演所到的音响主要分为:主放音响系统和返听音响系统。^[40-42]顾名思义,主放音响系统主要服务于听众,功能在于将演员的声音放大,使得听众能够享有较好的听觉效果;而返听音响系统则是服务于演员,使得演唱者能够听到自己的声音,这样的反馈能够更加有利于演员的演唱或者表演。(图 5.1-1 舞台音响布置情况^[43]描述了音乐厅扩声系统的基本布局情况,图中 loudspeakers in stage front 一般来说就是指返听音响,主要面向于演唱者本身;而图中其他音响就是面向于观众的主放音响⁹。)

⁹ 这里笔者没有严格考证舞台扩声系统的名词称呼,重点在于介绍返听音响的基本设计思路。所以,如有描述不准确,请读者多多包涵。

图 5.1-1 舞台音响布置情况^[43]

但是，在另外一些古典音乐的演唱中，通常是不采用电声扩音设备的^[44]。这种类型的演唱主要在室内音乐厅中进行，通过室内音乐厅的物理结构设计，使得演唱者的声音能够很好地上千名观众的视听需求，譬如最经典的波士顿交响乐大厅、维也纳的金色大厅；而“差得最有名”的当属被 Sabine 改造之前的 Fogg 艺术博物馆讲演厅^[45]了。其中，波士顿交响乐大厅，仅仅靠物理结构设计，可以满足两千六百多人的视听需求。所以，这种物理结构设计就相当于电声音乐中的主放音响系统。

在自然声演唱表演中，已经有音乐罩^[46]的结构实现“自然声主放音响”的功能。但是，还没有成熟完整的理论或者结构来替代电声返听音响的功能。但这种需求又确实是存在的，为了描述方便我们不妨就把这种物理结构成为“自然声返听音响”。

在采访了中国海洋大学和上海同济大学艺术系的师生¹⁰之后，他们描述了他们心中的理想音乐厅的样子。以青岛市音乐厅为例，他们讲最好是站在舞台上一拍手能够听到一些回音；同时，音乐系的同学（古典音乐方向）更表示，他们觉得在洗手间演唱效果最好。因为，他们在洗手间唱歌的时候，能够有效听到自己的回声，这样知道了自己的声音，更加有利于接下来演唱的调节。从而，使自己达到更好的演唱效果。由于音乐系的同学没有系统地学过声学理论，所以他们的表述比较通俗朴素也是完全可以理解的。那么，他们表达的实质在于舞台声能量

¹⁰ 这里采访的师生主要就是中国海洋大学艺术系孙道东教授和上海同济大学艺术与传媒学院声乐专业翟星霖同学。由于时间紧张，笔者没有做更为详尽完备的调研分析。

分布问题。通常我们研究音乐厅，总是非常关注观众席上声能量的分布问题，忽略了舞台上声能量的分布。所以说，这种“自然声返听音响”的物理结构还是有很多需求的。

那么，下文笔者具体的结构设计入手，尝试阐述周期亥姆霍兹共鸣器应用于自然声返听音响的设计思路。

5.2 自然声返听音响

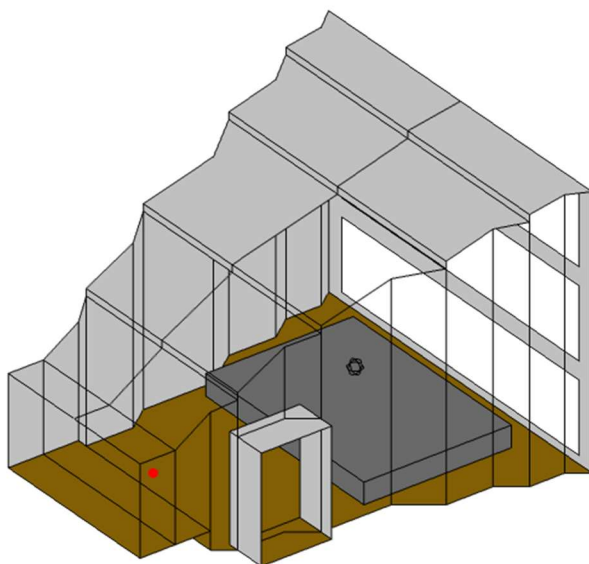


图 5.2-1 音乐厅结构示意图

上图为，一个音乐厅简单的结构示意图。表了表达清楚，选取侧截面。

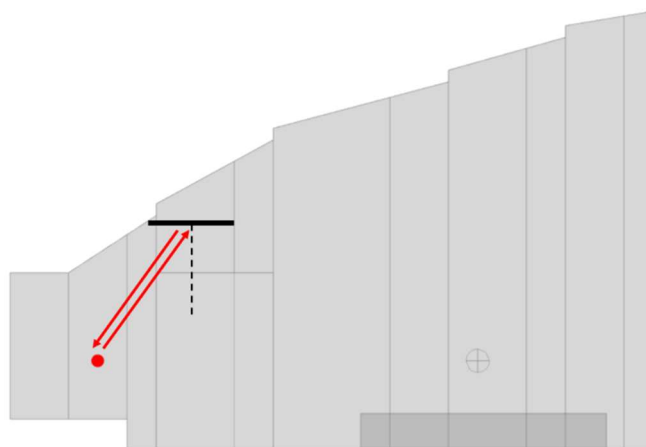


图 5.2-2 音乐厅模型的侧截面示意图

图中黑色实线为周期亥姆霍兹共鸣器界面结构拟设计挂放位置，红色圆点表示演唱者，红色箭头线表示入射到界面上的声线和被界面反射回来的声线。通过这样布防周期亥姆霍兹共鸣器界面结构，根据之前的理论模型可以演唱者的很多声能量被界面反射回来。这种声能量的反射可以增加声能量在舞台上的分布，使得演唱者能更好地听到自己的声音，进而有利于演唱水平的发挥。

5.3 自然声（律音）返听音响

说话声和音乐声有个很重要的区别，说话声是频谱上是连续的，而乐音在频谱上是线谱^[47]。同时，人耳能听到的频率范围很广，但一个音的频率为另一个音的频率的两倍的时候，对于这样的声音，我们听起来更像是同一个音，但是“调”提高了。每提高一个倍频程都有重复的感觉。所以，只要把一个倍频程内的音排列好了，就等于把所有的音都排列好了。乐律或音阶就是把一个倍频程内把若干音从低到高按照一定音程排列，以适合音乐的要求。所以，每一个音成为一个律音。

所以，要想周期亥姆霍兹共鸣器界面结构能够真正用到舞台表演中去，我们应该着重设计能够反射律音的这种界面结构，

6 总结与展望

6.1 总结

本文提出了一种周期亥姆霍兹共鸣器界面的结构,该结构能够实现声波的背向反射。其物理本质是声波之间的干涉。应用到的物理方法是居于共振耦合,即通过调整结构参数使得单个亥姆霍兹共鸣器共振和耦合共振同时发生。因此,可以在宽带范围内的背向反射。同时,为了更好地理解和验证这件事情,还进行了数值计算和实验研究。随后,结合当前的社会需求,提出了一种利用该结构的自然声返听音响的设计思路。最后,结合演唱者乐音表达的实际情况,提出了自然声(律音)返听音响的设计思想。

6.2 展望

本文非常清晰地展现了居于共振耦合的物理机制是如何实现背向反射的,这种对于物理概念的深刻把握是难能可贵的。同时,能够敏锐地嗅到艺术系师生对于理想音乐厅的设计需求,将这种需求和现有理论创造性地结合提出了自然声返听音响和自然声(律音)返听音响,这种丰富的创造力是本文中的一个闪光点。

但是,仍存在一些不足。

6.2.1 方位角与反射系数的关系

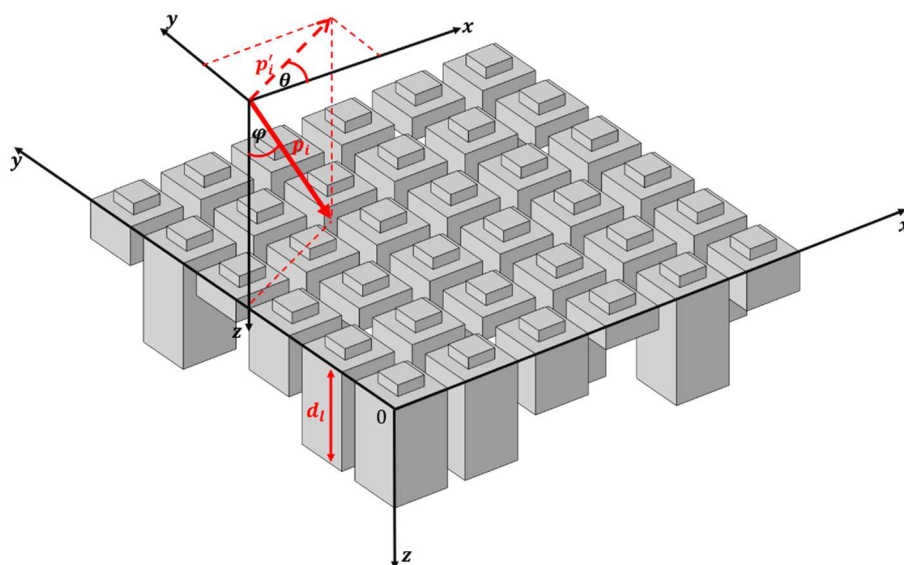


图 6.2-1 犄角与方位角的描述

在“4 数值仿真与实验”部分，为了简化计算，我们就把三维周期亥姆霍兹共鸣器界面结构简化为了二维周期亥姆霍兹共鸣器界面结构。做了这样的简化之后，虽然物理本质并没有发生改变，但是研究方法存在一些不足。即，二维界面结构仅能研究犄角 φ 与反射系数的关系，缺少了方位角 θ 与反射系数之间的关系。所以，在本文之后，关于这方面的工作应该继续进行方位角与反射系数的关系研究。

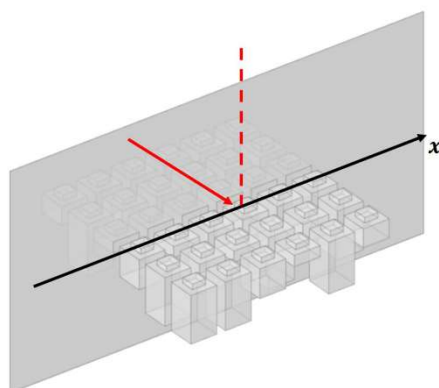


图 6.2-2 方位角 $\theta=0^\circ$

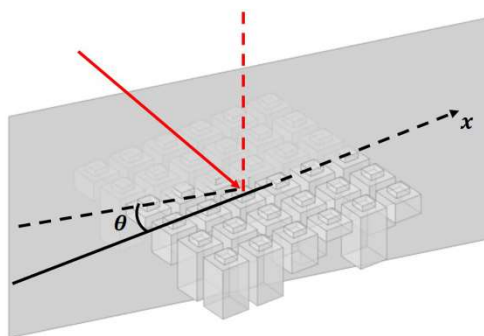


图 6.2-3 方位角 $\theta=-15^\circ$

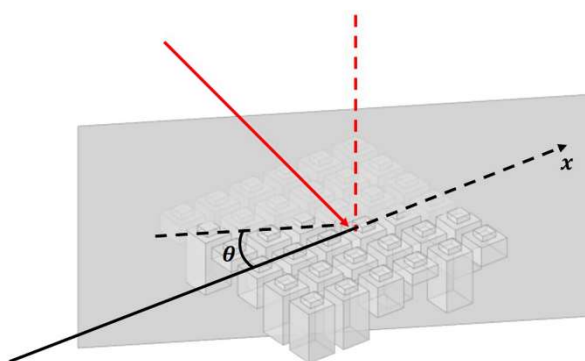


图 6.2-4 方位角 $\theta=-30^\circ$

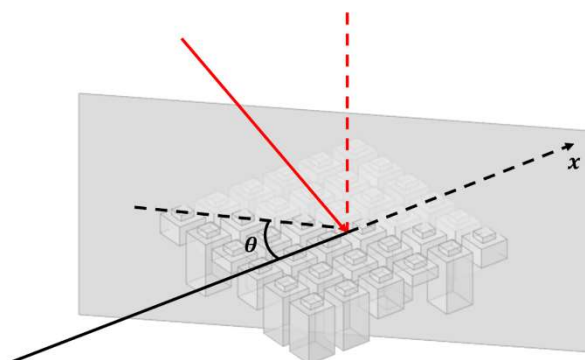


图 6.2-5 方位角 $\theta=-45^\circ$

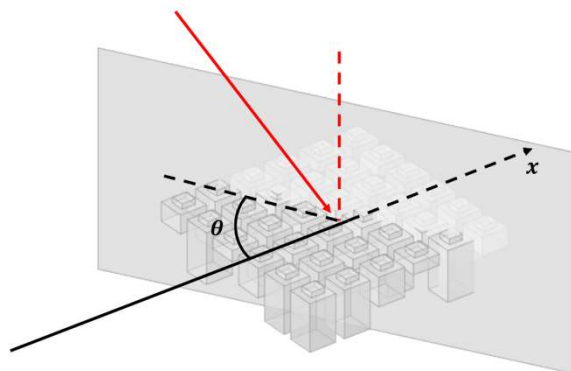


图 6.2-6 方位角 $\theta=-60^\circ$

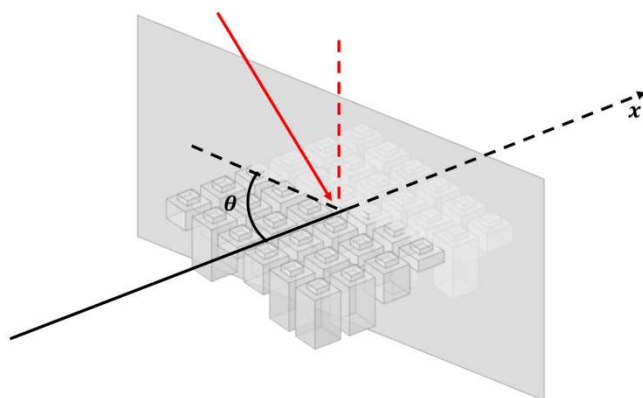


图 6.2-7 方位角 $\theta=-75^\circ$

6.2.2 返听音响对声能量分布的影响

从能量的角度分析，自然声返听音响基本原理就是把原来应该辐射到观众席的一份部分能量切下来辐射到了舞台，以此实现歌唱者听到自己的声音。其影响也是两方面的，一方面，能够使得歌唱者能够更好地了解自己的演唱反馈，从而可以及时调整自己的演唱状态，进而达到更好的演唱效果；另一方面，自然声返听音响会使得辐射到观众席的声能量减少，会影响观众席的视听体验。（如图 6.2-8 所示，红色阴影区为被返听音响截断的本应该辐射到观众席的声线。）

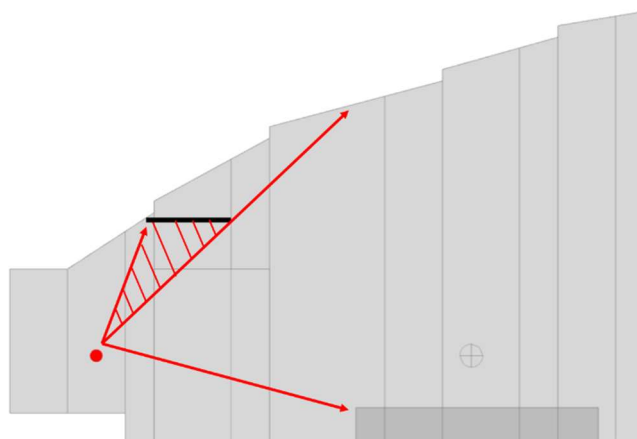


图 6.2-8 返听音响对声能量空间分布的影响

所以，在设计舞台自然声返听音响的时候，除了考虑返听音响对于舞台能量的增加，还要考虑到返听音响对于观众席声能量的减少。这就要求，自然声返听音响的设计在满足演唱者返听需求之后，应该尽可能避免观众席声能量辐射的减少。

7 参考文献

- [1] Wood R.W. XLII. On a remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating spectrum[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1902, 4(21): 396-402.
- [2] Stewart J.E., Gallaway W.S. Diffraction anomalies in grating spectrophotometers[J]. Appl. Opt., 1962, 1(4): 421-430.
- [3] Rayleigh L. XII. On the manufacture and theory of diffraction-gratings[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1874, 47(310): 81-93.
- [4] Hessel A., Oliner A. A new theory of Wood's anomalies on optical gratings[J]. Appl. Opt., 1965, 4(10): 1275-1297.
- [5] Strutt J.W. On the dynamical theory of gratings[J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 1907, 79(532): 399-416.
- [6] Hessel A., Schmoys J., Tseng D.Y. Bragg-angle blazing of diffraction gratings*[J]. J. Opt. Soc. Am., 1975, 65(4): 380-384.
- [7] Chen W., Beaulieu N.C., Michelson D.G., et al. Off-Bragg Blazed Rectangular Groove Gratings for High Diffraction Efficiency Devices[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2013, 61(4): 2342-2347.
- [8] Wirgin A., Deleuil R. Theoretical and experimental investigation of a new type of blazed grating[J]. JOSA, 1969, 59(10): 1348-1357.

- [9] Memarian M., Li X., Morimoto Y., et al. Wide-band/angle Blazed Surfaces using Multiple Coupled Blazing Resonances[J]. Scientific Reports, 2017, 7: 42286.
- [10] Wei Z., Li H., Wu C., et al. Anomalous reflection from hybrid metamaterial slab[J]. Opt. Express, 2010, 18(12): 12119-12126.
- [11] Wang Z.G., Lee S.H., Kim C.K., et al. Acoustic wave propagation in one-dimensional phononic crystals containing Helmholtz resonators[J]. Journal of Applied Physics, 2008, 103(6): 064907.
- [12] Fang N., Xi D., Xu J., et al. Ultrasonic metamaterials with negative modulus[J]. Nature materials, 2006, 5(6): 452.
- [13] Bradley C. Time-harmonic acoustic Bloch wave propagation in periodic waveguides. Part III. Nonlinear effects[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1995, 98(5): 2735-2744.
- [14] Bradley C. Time harmonic acoustic Bloch wave propagation in periodic waveguides. Part II. Experiment[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1994, 96(3): 1854-1862.
- [15] Bradley C. Time harmonic acoustic Bloch wave propagation in periodic waveguides. Part I. Theory[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1994, 96(3): 1844-1853.
- [16] 张亚东. "一维镶嵌周期局域共振结构界面的声背向反射." 硕士, 南京大学, 2011.

- [17] 张亚东, 王新龙. 周期镶嵌亥姆霍兹共鸣腔平板的声全背向反射[J]. 声学学报, 2011, 36(02): 191-196.
- [18] Yang X., Yin J., Yu G., et al. Acoustic superlens using Helmholtz-resonator-based metamaterials[J]. Applied Physics Letters, 2015, 107(19): 193505.
- [19] Moiseyenko R.P., Liu J., Declercq N.F., et al. Blazed phononic crystal grating[J]. Applied Physics Letters, 2013, 102(3): 034108.
- [20] Zhao D., Ye Y., Xu S., et al. Broadband and wide-angle negative reflection at a phononic crystal boundary[J]. Applied Physics Letters, 2014, 104(4): 043503.
- [21] 温激鸿, 声学超材料基础理论与应用. 北京: 科学出版社, 2018. 3-13
- [22] 祝绍箕, 邹海兴, 包学诚. 衍射光栅[J]. 北京: 机械工业出版社, 1986, 32: 6.
- [23] Floquet G. "Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques." Paper presented at the Annales scientifiques de l'École normale supérieure, 1883.
- [24] Bloch F. Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern[J]. Zeitschrift für physik, 1929, 52(7-8): 555-600.
- [25] 杜功焕, 朱哲民, 龚秀芳, 声学基础.第 3 版. 南京: 南京大学出版社, 2012. 135-138

[26] Dong Y., Yu G., Wang X., et al. Broadband and wide-angle blazed acoustic gratings using multiple coupled Helmholtz resonators[J]. Applied Physics Express, 2017, 10(9):

[27] 梁家荣, 张棣. Floquet 理论在研究周期解中的应用[J]. 广西师院学报(自然科学版), 1995, (01): 15-18.

[28] Blackwell T. "Particle Swarm Optimization in Dynamic Environments." Paper presented at the Applications of Evolutionary Computing, Evoworkshops: Evobio, Evocomnet, Evohot, Evoiasp, Evomusart, & Evostoc, Coimbra, Portugal, April, 2007.

[29] Iqbal M., Oca M.A.M.D. "An Estimation of Distribution Particle Swarm Optimization Algorithm." Paper presented at the Ant Colony Optimization & Swarm Intelligence, International Workshop, Ants, Brussels, Belgium, September, 2006.

[30] Iwasaki N., Yasuda K. Adaptive particle swarm optimization using velocity feedback[J]. International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 2005, 1(3): 369-380.

[31] Kadiramanathan V., Selvarajah K., Fleming P.J. Stability analysis of the particle dynamics in particle swarm optimizer[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2006, 10(3): 245-255.

[32] Langdon W.B., Poli R. "Evolving problems to learn about particle swarm and other optimisers." Paper presented at the 2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2005.

- [33] Xie Y., Wang W., Chen H., et al. Wavefront modulation and subwavelength diffractive acoustics with an acoustic metasurface[J]. Nature communications, 2014, 5: 5553.
- [34] Tang K., Qiu C., Ke M., et al. Anomalous refraction of airborne sound through ultrathin metasurfaces[J]. Scientific reports, 2014, 4: 6517.
- [35] Li Y., Liang B., Gu Z.-m., et al. Reflected wavefront manipulation based on ultrathin planar acoustic metasurfaces[J]. Scientific reports, 2013, 3: 2546.
- [36] Zhao J., Li B., Chen Z., et al. Manipulating acoustic wavefront by inhomogeneous impedance and steerable extraordinary reflection[J]. Scientific reports, 2013, 3: 2537.
- [37] 江艺. "“鸟巢” 首场演唱会的舞台, 音响与灯光设计." 2009.
- [38] 萨拉, 拉斯敦, 里德, et al. 第 53 届欧洲歌唱大赛的视觉设计与音响设计[J]. 演艺设备与科技, 2009, (4): 77-79.
- [39] 向海燕. "大型户外音乐节音响系统设计与实践." 2013.
- [40] 黄伟, 张冠华. 刘欢 2013 年演唱会音响, 视频设计全接触[J]. 演艺科技, 2013, (1): 62-67.
- [41] 李永荣. 流行音乐演唱会音响设计[J]. 演艺科技, 2011, (3): 20-22.
- [42] 张飞碧, 吴晓路. 周华健世界巡回演唱会流动演出扩声系统[J]. 实用无线电, 1999, (6): 25.
- [43] Figwer J.J. The Louisiana Superdome Sound System[J]. Journal of the Audio Engineering Society, 1976, 24(7): 554-561.

[44] Cavanaugh W.J., Wilkes J.A., Architectural Acoustics: Principles and Practice. Wiley, 1999. chapter 5

[45] Cavanaugh W.J. Report on the Wallace Clement Sabine Centennial Symposium held 3–7 June 1994[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1995, 97(3): 1998-2001.

[46] Bradley J.S. Some effects of orchestra shells[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1996, 100(2): 889-898.

[47] 马大猷, 沈壕, 声学手册. 科学出版社, 1983. 804-817

8 致谢

首先，我要感谢我的指导老师郁高坤老师。在整个毕业论文的准备过程中郁老师对我悉心指导，在下班甚至入夜以后仍然会对我提出的疑问进行解答。是郁老师循序渐进的教导才使得我能够顺利完成本次的毕业论文。

其次，我要感谢我的父母以及宿舍的每位舍友，在这几年的学习生活中，每当我遇到挫折时，是他们的鼓舞让我坚持了下来。

之后，我要感谢每一位对我的毕业论文有所帮助的人，感谢他们对我的付出，让我完成了这次的毕业论文。

最后，感谢我生活和学习了四年的中国海洋大学，感谢她为我提供了良好的学习氛围和宝贵的学习经验。