

# Capítulo 22

## **TOMOGRAFIAS COMPUTADORIZADAS E ANÁLISES NUMÉRICAS APLICADAS À CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA POROSA DE SOLOS NÃO SATURADOS**

André Luís Brasil Cavalcante  
Lucas Parreira de Faria Borges  
Patrícia Figueiredo de Sousa  
Silvio Crestana  
Jorge Gabriel Zornberg  
José Camapum de Carvalho

### **1. INTRODUÇÃO**

O fenômeno do transporte de fluidos em meios porosos sempre foi um desafio para os diversos pesquisadores da academia. O trabalho pioneiro sobre a caracterização hidráulica da estrutura porosa dos solos estava soterrado no apêndice de um relatório que, em 1856, visava avaliar a colmatção dos chafarizes da cidade de Dijon, na França. Este apêndice contém os resultados experimentais de ensaios em colunas de areia conduzidos pelo engenheiro Henri P. G. Darcy (Darcy, 1856). Este estudo, que marca o início da caracterização hidráulica de estruturas porosas, descreveu que a velocidade do fluxo de água em um solo arenoso saturado pode ser estimada pelo produto entre uma constante, denominada coeficiente de permeabilidade, e o gradiente hidráulico, definido como a razão entre a variação da carga hidráulica e a distância entre dois pontos de interesse. Apesar de simples, tal contribuição foi de grande valia para o entendimento macroscópico de como os fluidos se movimentam entre os vazios do solo. Todavia, com o passar do tempo, houve a necessidade de se extrapolar as condições estipuladas para a formulação original de Darcy para casos de regime não laminar e/ou em condições de variação da saturação do meio. Nesse novo contexto, surgiram formulações para lidar com problemas de fluxo turbulento, fluxo em solo não saturado, o fenômeno de barreira capilar, o efeito da umidade nas variações volumétricas dos solos, e muitos outros.

Dos problemas citados, uma área de grande interesse dos engenheiros geotécnicos e que se mostra relativamente complexa é a análise do solo submetido a regimes não sa-

turados. Em outras palavras, quando os espaços entre os grãos do solo estão preenchidos com mais de uma fase fluida. Pode-se encontrar, no solo, água, ar, gases, óleos, petróleo, contaminantes e outros fluidos que compõem um domínio multifásico. Entretanto, sabe-se que as fases fluídas que mais predominam quanto ao nível de ocorrência, geralmente, são ar e água, mas, mesmo restringindo-se a esse caso, o tratamento do fluxo em meio não saturado envolve muitas peculiaridades. Isto inclui a natureza da distribuição molecular da água no contato solo-água e água-ar e ainda, nos conjuntos solo-obras de engenharia, solo-vegetação e solo-fonte de contaminação, questões que ainda merecem mais elaboração no avanço das análises. Isso sem considerar as variações volumétricas que podem acontecer no meio, como o adensamento e a expansão, e o aparecimento de patologias, como o surgimento de trincas, o carreamento de partículas e de compostos químicos solubilizados que são problemas extremamente difíceis de se computar e modelar.

De não menor complexidade seria estudar a variação volumétrica da porosidade de solos pouco intemperizados contendo argilominerais expansivos, sendo impossível distinguir o que efetivamente foi a alteração nos vazios e o que foi proveniente da alteração do volume das partículas em função da variação no seu nível de hidratação (Camapum de Carvalho e Gitirana Jr., 2021). Outro problema bastante complexo, na área de solos não saturados, é considerar a intervenção da sucção no fluxo e no comportamento mecânico quando há a presença de uma distribuição de poros bimodal que é geralmente o caso dos solos tropicais profundamente intemperizados. Isso exemplifica, a importância do estudo do sistema multifásico que é o solo, o que implica, geralmente, no emprego de simplificações e restrições para estudar (separadamente e em conjunto) os diversos problemas citados.

Partindo dos problemas sobre a ótica da mecânica dos solos não saturado, analisando-se apenas os dois fluidos mais comuns para a problemática geotécnica, tem-se um solo composto por três fases: grãos de solo (sólida), água (líquida) e ar (gasosa). É evidente que a fase sólida tem significativa interferência no fluxo, pois é a definidora da formação do esqueleto que armazena e por onde ocorre o fluxo e, da energia que liga a água ao mineral.

Alguns autores estabelecem a existência de uma quarta fase, que denominam de membrana ou película contrátil. Destaca-se que o fenômeno definidor da membrana contrátil na interação ar-água nos meniscos é semelhante ao presente nas bolhas oclusas, mas com efeitos distintos. Em ambos os casos, a chamada membrana contrátil se deve à orientação das moléculas de água no contato ar-água devido à interrupção da continuidade do fluido, água. Porém, no caso do menisco, a junção dessa película com a fase sólida gera, quando a fase água é contínua, um movimento da fase ar até que ocorra o equilíbrio de energia. Quando ela é descontínua, ocorre o surgimento de uma força atrativa que puxa um grão contra o outro, ou um conjunto de grãos entre si, até que ocorra o equilíbrio de energia com a consequente estabilização do menisco capilar formado. Nesse caso, o aspecto físico correspondente ao tamanho e forma dos poros e as características químico-mineralógica do solo e química do fluido assumem significativa influência nesse equilíbrio. No caso das bolhas oclusas, o equilíbrio de energia se dá com o fechamento da própria esfera sem que geralmente ocorra um contato direto da fase gasosa com o mineral, mas essas moléculas de água orientadas continuam em interação com as demais moléculas da água, interferindo no fluxo não só devido a essa energia interativa, como também

pela presença das próprias esferas gasosas formadas. Contudo, o fenômeno aqui descrito, quanto ao menisco capilar, é de natureza predominantemente física e, no caso, atuante nos solos mais granulares pouco ativos com baixa energia de superfície. No caso das argilas, no entanto, surge a intervenção da energia adsorviva, característica do mineral, fazendo com que o menisco se forme entre camadas de adsorção, sendo que tanto o fluxo quanto a interação entre partículas sejam comandados pelo déficit nessa energia de adsorção e não pela capilaridade propriamente dita. Essa energia de adsorção intervém no comportamento hidromecânico tanto dos solos não saturados como dos solos saturados.

Ainda sobre a questão do fluxo em meio não saturado, salienta-se que este pode se dar de três modos: a) quando a fase ar e a fase água são contínuas, condição em que a água flui devido a uma diferença de potencial, em especial, de sucção, nela atuante e por meio do fluxo de ar, conduzindo as moléculas de água que passaram para a condição de vapor; b) quando a fase água é contínua e a fase ar é descontínua, condição em que o fluxo se dá, majoritariamente, pela atuação de uma diferença de potencial gravitacional no sistema água-ar e pela atuação da condição atmosférica na superfície exposta do fluido e pela migração das bolhas de ar oclusas contendo água na forma de vapor; c) a fase água é descontínua e a fase ar contínua, a água transformada em vapor passa à fase ar, que, sob efeito de maior pressão, flui, conduzindo-a para a atmosfera.

Portanto, depreende-se dessa breve exposição que os fenômenos que ocorrem na interação solo-água-ar são complexos e ainda não bem conhecidos em sua essência. Nesse contexto de complexidade, a prudência recomenda que, neste capítulo, atenha-se aos solos granulares de modo a evidenciar, mais claramente, a importância da ferramenta numérica e da própria modelagem física para o entendimento do comportamento dos solos saturados e não saturados, assim como para a proposição de soluções para problemas de engenharia.

Uma equação robusta capaz de sistematizar matematicamente o comportamento do fluxo de água em um solo não saturado é a equação de Richards (Richards, 1931). Tal equação leva em consideração que a umidade do solo pode variar, assim como a sucção, no tempo e no espaço. Assim, esta equação permite simular o fenômeno do fluxo em sistemas não saturados de posse da curva de retenção de água no solo (curva característica) e da função de condutividade hidráulica não saturada.

Estudos recentes permitem utilizar tomografias computadorizadas para abordar, de forma física as particularidades advindas da estrutura porosa do solo. Além disso, a partir das tomografias computadorizadas e de novos métodos numéricos, tais como o método dos autômatos celulares, é possível gerar malhas que representam essa estrutura porosa. O método dos autômatos celulares pode ser usado para definir funções de distribuição acumulada dos diâmetros dos poros que representem tomografias computadorizadas binarizadas. O método também permite a associação dessas funções de distribuição a autômatos celulares que apresentem as mesmas propriedades da estrutura porosa da tomografia computadorizada binarizada. Por último, o método viabiliza a possibilidade de se obter uma função de distribuição acumulada dos diâmetros dos poros, a permeabilidade intrínseca e a curva característica para os autômatos celulares em estudo. Este capítulo dedica-se a apresentar a metodologia de utilização do método numérico autômatos celulares e a viabilidade de sua utilização para a representação da estrutura porosa de solos

não saturados, atendo-se as análises à consideração apenas do meio físico e, em respeito a essa limitação, as análises a serem apresentadas se voltam apenas para os materiais granulares de natureza mineralógica não expansiva, com baixa atividade de superfície e distribuição de poros unimodal.

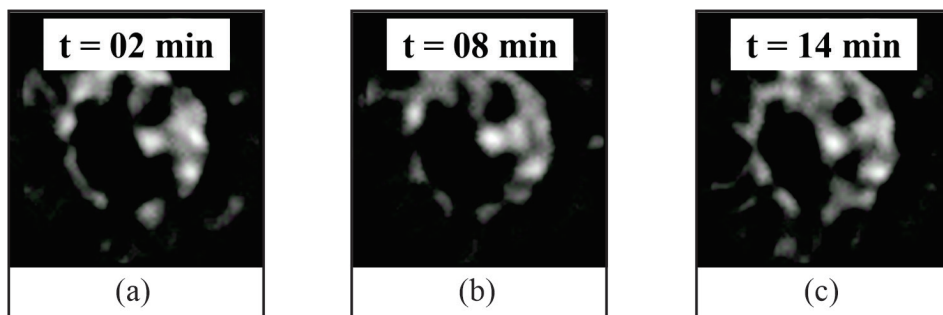
## 2. EMPREGO DA TOMOGRAFIA PARA O ESTUDO DO SOLO

Para a Engenharia Geotécnica, o entendimento do movimento de água no solo é essencial para o dimensionamento de obras, a prevenção e a mitigação de problemas ambientais e civis, como os relativos ao cálculo da estabilidade de taludes de terra e a definição do projeto de barreiras de contenção.

Diante disso, há uma busca contínua por modelos e ensaios que consigam estimar de forma precisa e rápida o comportamento hidráulico do solo, principalmente na condição não saturada. Dentro dessa temática, a tomografia computadorizada (TC) começou a ser empregada para estudo do solo na década de 80, surgindo como uma ferramenta de grande potencial de caracterização e visualização do arranjo interno do meio poroso de forma não destrutiva, ou seja, sem danificar a sua estrutura durante o ensaio.

A vasta gama de estudos sobre a aplicabilidade dessa importante técnica abrange desde a compreensão do processo de infiltração e da heterogeneidade de meios porosos até a aferição de grandezas, como densidade, porosidade, tortuosidade, grau de anisotropia, entropia, lacunaridade, condutividade hidráulica, umidade do solo, esfericidade, granulometria, dimensão fractal, entre tantos outros (Crestana *et al.*, 1985; Vaz *et al.*, 1989; Naime, 2001; Pires *et al.*, 2005; Borges, 2011; Zubeldia, 2013; Ozelim, 2014; Zubeldia *et al.*, 2016; Ozelim e Cavalcante, 2018a; Tseng *et al.*, 2018a; Tseng *et al.*, 2018b; Borges *et al.*, 2019).

Um exemplo de aplicabilidade dessa técnica foi feito por Naime (2001), que desenvolveu um tomógrafo de baixo custo para estudo de algumas propriedades físicas e hidráulicas do solo. Por meio de um experimento de infiltração, esse autor conseguiu, dentre outras coisas, monitorar a variação de umidade em diversas seções de corpos-de-prova durante a imposição de fluxo descendente vertical. Na Figura 1, é apresentada a evolução do avanço da frente de umidade para uma única seção de uma amostra de latossolo estudada por esse autor. Nessas imagens, o teor de umidade volumétrica está variando de 0 a ~40%, de modo que quanto mais claro, mais úmida está a área do pixel analisada.



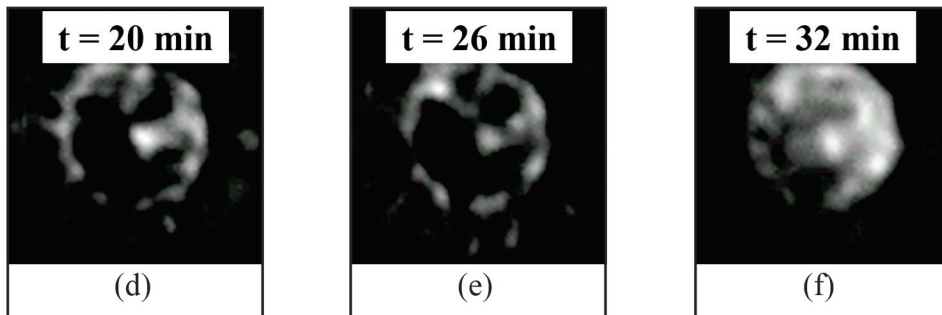


Figura 1 – Estudo do avanço da frente de umidade em uma única seção transversal de amostra de latossolo: (a)  $t = 2$  min, (b)  $t = 8$  min, (c)  $t = 14$  min, (d)  $t = 20$  min, (e)  $t = 26$  min, (f)  $t = 32$  min (Adaptado de Naime (2001))

Além das aplicações citadas, estudos recentes mostram que, a partir das tomografias computadorizadas e de novos métodos numéricos, tais como o método dos autômatos celulares, é possível gerar malhas que representam, com certa semelhança, a estrutura porosa dos solos (Zubeldia *et al.*, 2016; Ozelim e Cavalcante, 2018b), sendo esse o foco deste capítulo.

### 3. MÉTODO NUMÉRICO AUTÔMATOS CELULARES

Autômato Celular (AC) é um modelo discreto estudado no campo da matemática com enfoque computacional. Os autômatos celulares são sistemas dinâmicos que evoluem em passos discretos de tempo. Eles formam uma malha cujas células têm um valor discreto que depende do valor (estado) das células vizinhas no passo de tempo anterior. A partir de regras locais que relacionam as células da “vizinhança”, o estado de cada célula dentro da malha é atualizado sincronicamente em cada passo de tempo, o que gera uma configuração diferente da anterior (Wolfram, 1983). Três características fundamentais dos AC são (Schiff, 2008):

- Uniformidade: todas as células são atualizadas seguindo uma mesma regra.
- Sincronização: o estado de cada célula é atualizado simultaneamente.
- Localidade: as regras são essencialmente locais, ou seja, relacionam apenas às células localizadas na vizinhança de cada célula.

A malha pode ter  $d$  ( $d \geq 1$ ) dimensões, as células dentro delas podem ter  $k$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ;  $k \geq 2$ ) estados e a vizinhança pode atingir  $r$  ( $r \in \mathbf{Z}^+$ ) níveis. Quando as células vizinhas são as imediatamente adjacentes, a vizinhança é de nível um ( $r = 1$ ), quando são consideradas as imediatamente adjacentes junto com as adjacentes a elas, a vizinhança é de nível dois ( $r = 2$ ), e assim por diante. A definição de  $d$ ,  $k$  e  $r$  determina a quantidade de autômatos diferentes que podem ser gerados.

Os autômatos celulares elementares (ACE) são os autômatos unidimensionais ( $d = 1$ ), com dois possíveis estados ( $k = 2$ ) e com vizinhança de nível 1 ( $r = 1$ ) com variação temporal. São inicializados por uma linha de células cujo estado inicial é definido por

uma variável booleana (0 ou 1, preto ou branco). Neste caso, em cada passo de tempo, o estado de uma célula muda segundo uma regra definida, que depende do estado das células vizinhas, ou seja, o valor da célula depende do valor dela e das células imediatamente adjacentes no passo de tempo anterior. Para essa classe de autômatos, na qual só há duas possibilidades de estado (1-branco ou 0-preto), são necessárias  $2^3 = 8$  combinações de trios para definir uma regra. Portanto, existem  $2^8 = 256$  possíveis regras. Elas aparecem definidas em Wolfram (2002), e o número, no sistema decimal, que dá nome a cada regra é o correspondente ao número no sistema binário que se obtém como resultado da evolução da regra a partir de uma condição inicial predefinida.

Dentre as 256 regras, Wolfram (2002) conseguiu obter desde padrões simples, como retas e pontos, passando por fractais, até malhas caóticas (Figura 2). No caso dos autômatos elementares apresentados na Figura 2, a lei de formação das células obedece ao comportamento estabelecido no topo das imagens. Nesse caso, as três células da camada superior determinam a célula central da camada inferior. A primeira linha, todavia, é a condição inicial. Nesse caso, todas as células são brancas (valor nulo), exceto a central, que é preta (valor unitário).

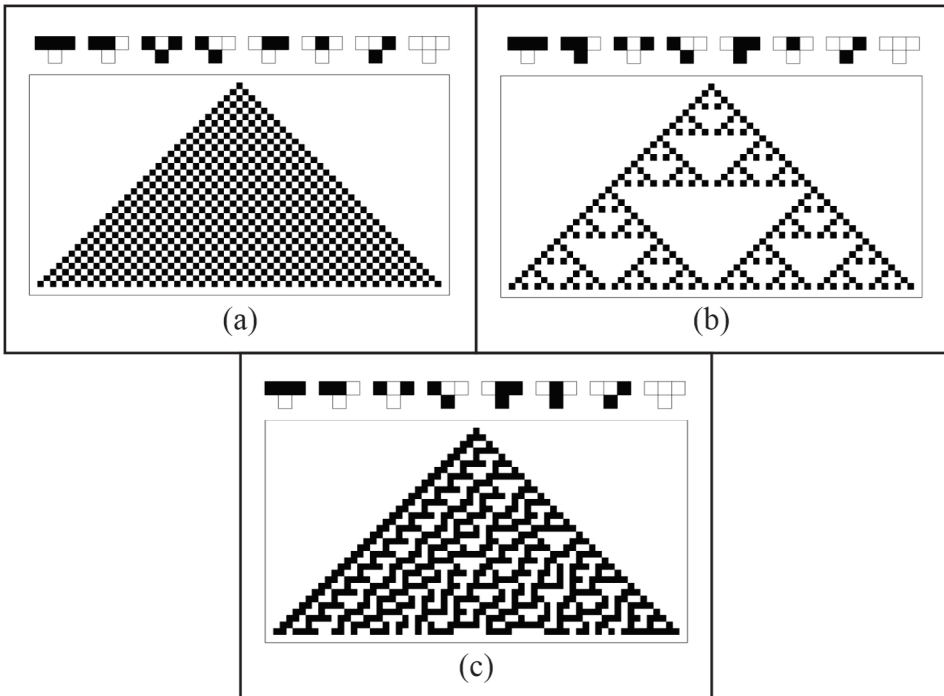


Figura 2 – Autômatos elementares de Wolfram: (a) Regra 50; (b) Regra 90; (c) Regra 30

Os autômatos celulares bidimensionais (AC2D) são formados por uma malha em duas dimensões. Essa malha pode ser quadrada, triangular ou hexagonal (Figura 3). Vale ressaltar que, no caso do ACE, o autômato propriamente dito é representado em uma li-

na. A malha observada como evolução de uma regra (p. ex., na Figura 2) é, na realidade, um gráfico  $(x, y) \rightarrow (posição, tempo)$ , pois cada linha representa um passo de tempo. Nos AC2D, cada passo de tempo é representado por uma malha em duas dimensões no espaço. Nesses casos, a evolução do AC é representada em malhas independentes, uma para cada passo de tempo ou poderia se construir um gráfico  $(x, y, z) \rightarrow (x, y, tempo)$ , incorporando o tempo na terceira dimensão.

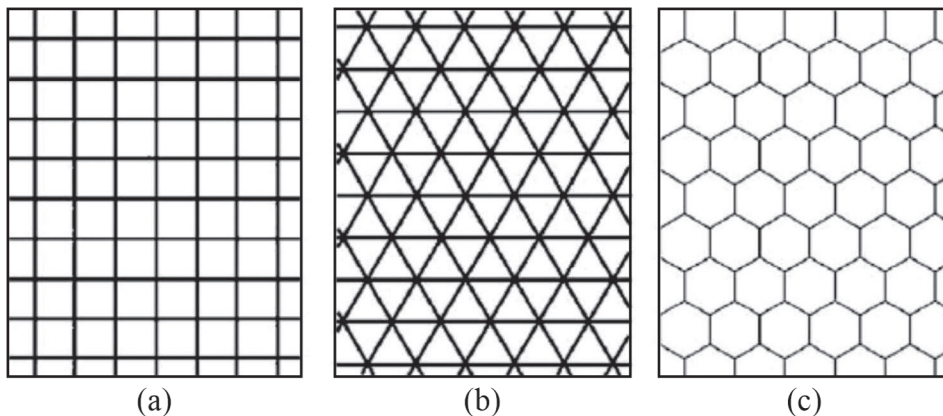


Figura 3 – Tipos de malhas de AC2D: (a) Quadrada; (b) Triangular; (c) Hexagonal

A lógica da numeração das regras AC2D é similar à dos ACE, ou seja, o número, no sistema decimal, que dá nome a cada regra é o correspondente ao número no sistema binário que se obtém como resultado da evolução da regra a partir de uma condição inicial. No entanto, devido ao elevado número de regras AC2D que existem, geralmente, elas são divididas em grupos e numeradas independentemente dentro desses grupos. Para malhas quadradas, que são as mais usadas, utilizam-se, basicamente, dois tipos de vizinhança, as chamadas vizinhanças de Moore e de Von Neumann (Figura 4). A vizinhança de Moore considera a influência de todas as células ao redor do ponto de interesse, enquanto a de Von Neumann considera apenas as que estão diretamente ligadas aos lados, acima e abaixo do ponto. A própria célula pode formar parte ou não da vizinhança.

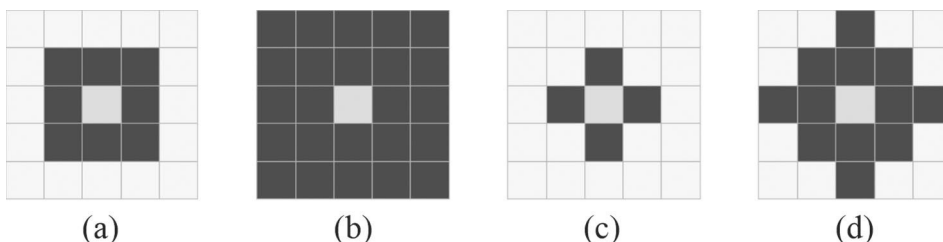


Figura 4 – Tipos de vizinhanças comuns utilizadas nos AC bidimensionais. Vizinhanças de Moore: (a) Vizinhança de Moore para  $r = 1$ ; (b) Vizinhança de Moore para  $r = 2$ ; (c) Vizinhança de Von Neumann para  $r = 1$ ; (d) Vizinhança de Von Neumann para  $r = 2$

Deve notar-se que a quantidade de regras que definem os ACE é relativamente pequena, no entanto, o número de possibilidades no caso bidimensional é exponencialmente maior. Considerando-se apenas autômatos binários ( $k = 2$ ) e uma vizinhança de Von Neumann, há  $2^5 = 32$  configurações para se gerar uma regra e, portanto, existem  $2^{32} \approx 4.10^9$  possíveis regras. Considerando-se a vizinhança de Moore, aparecem  $2^9 = 512$  configurações para uma regra e, conseqüentemente,  $2^{512} \approx 10^{154}$  possíveis regras. Uma descrição detalhada desses padrões pode ser encontrada em Wolfram (1984) e Packard e Wolfram (1985).

Um importante avanço no campo dos autômatos celulares foi a criação da função iota-delta (Ozelim *et al.*, 2012). Tal função permite que diversos autômatos celulares, antes definidos apenas por meio de condicionais e outras funções de programação, sejam definidos algebricamente. Com isso, além da facilidade de implementar autômatos celulares, essa função também permite que aplicações em outros campos do conhecimento sejam mais factíveis. A função iota-delta é definida da seguinte forma:

$$i\delta_n^m[x] = \text{mod}[\text{mod}[\text{mod}[\text{mod}[x, p_m], p_{m-1}], \dots, p_j], n] \quad (\text{Eq. 1})$$

onde,

$m$  e  $n$  são parâmetros inteiros positivos da função;

$x$  é o argumento da função, definido pela combinação linear de células da vizinhança;

$j$  é igual a  $\pi[n] + 1$ , sendo  $j$  o número de primos;

$\pi[n]$  é a função que retorna o número de primos menores ou iguais ao argumento  $n$ .

Autômatos celulares como representação de meios porosos, como o solo, foram estudados recentemente por Bandman (2011), Zubeldia *et al.* (2016) e Ozelim e Cavalcante (2018b). Os autores concluíram que os autômatos elementares e bidimensionais são capazes de simular meios porosos a partir do paralelo no qual os vazios do solo são representados por células em branco e o espaço ocupado pelos grãos, por células em preto. Além disso, os autores discutem que características como a porosidade e a permeabilidade intrínseca se estabilizam e mantêm-se constantes para cada autômato depois de um certo número de iterações.

#### 4. MODELO DE PERMEABILIDADE

A lei de Hagen-Poiseuille para fluxo estacionário por um tubo capilar circular de diâmetro  $d$  é dada por:

$$q_i = \frac{\pi d^4}{128\mu} \frac{\Delta p}{L_c} \quad (\text{Eq. 2})$$

onde,

$q_i$  é a taxa de fluxo volumétrico para um único tubo capilar [ $L^3T^{-1}$ ];

$d$  é o diâmetro do tubo capilar [ $L$ ];

$\Delta p$  é a queda de pressão através do meio [ $FL^{-2}$ ];

$\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido [ $FL^{-2}T$ ];

$L_c$  é o comprimento tortuoso do tubo [ $L$ ].



Para um meio poroso com  $n$  poros cilíndricos e tortuosos, semelhantes a tubos capilares, a lei de Hagen-Poiseuille pode ser escrita como:

$$q_T = n \frac{\pi d^4}{128\mu} \frac{\Delta p}{L_e} \quad (\text{Eq. 3})$$

onde,  $q_T$  é o fluxo volumétrico total pelo meio [ $L^3T^{-1}$ ].

A porosidade do meio pode ser definida como a razão entre o volume de poros e volume total, dada por:

$$\phi = \frac{n(\pi d^2/4)L_e}{A_T L} \quad (\text{Eq. 4})$$

onde,

$A_T$  é a área total da seção transversal [ $L^2$ ]

$L$  é o comprimento do meio poroso [ $L$ ].

Isolando-se  $A_T$  na Equação (4) pode-se obter:

$$A_T = \frac{n \pi d^2}{\phi} \frac{L_e}{L} \quad (\text{Eq. 5})$$

A Lei de Darcy para um fluxo monofásico em um meio poroso é dada por:

$$q_T = \frac{k A_T}{\mu} \frac{\Delta p}{L} \quad (\text{Eq. 6})$$

onde,  $k$  é a permeabilidade intrínseca do meio poroso [ $L^2$ ].

Comparando-se a Equação (6) com a Equação (3) pode-se obter a permeabilidade intrínseca do meio com poros similares a tubos capilares, descrita por:

$$k = \frac{n \pi d^2}{128} \frac{L}{A_T L_e} \quad (\text{Eq. 7})$$

Substituindo-se a Equação (5) na Equação (7), é possível obter o seguinte modelo de permeabilidade intrínseca:

$$k = \frac{\phi d^2}{32\tau} \quad (\text{Eq. 8})$$

onde,  $\tau$  é a tortuosidade do meio poroso, adimensional, definida por:

$$\tau = \left( \frac{L_e}{L} \right)^2 \quad (\text{Eq. 9})$$

A Equação mostra que a permeabilidade é proporcional ao quadrado da dimensão característica do meio poroso. Além do mais, isso demonstra que a permeabilidade também é proporcional à porosidade do meio. Assumiu-se que o conjunto de  $n$  tubos capilares apresentavam as mesmas dimensões. Todavia, assumindo-se que o modelo inclui uma distribuição de poros arbitrária, pode-se obter resultados mais verossímeis. A função de densidade de probabilidade para distribuição dos diâmetros dos poros é mostrada na Figura 5.

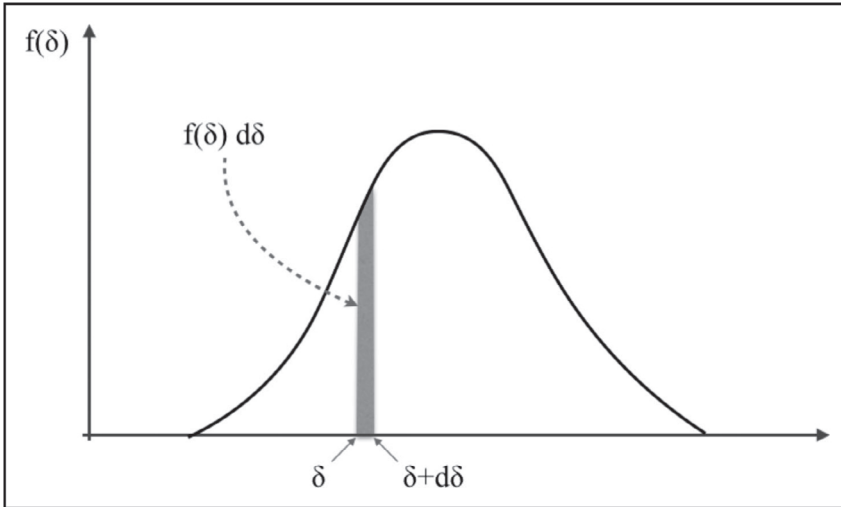


Figura 5 – Função de densidade de probabilidade para distribuição dos diâmetros dos poros

A função de densidade de probabilidade para distribuição dos diâmetros dos poros deve satisfazer a seguinte condição:

$$\int_0^{\infty} f(\delta) d\delta = 1 \quad (\text{Eq. 10})$$

Considerando-se  $n_{\delta}$  como o número de poros com diâmetro entre  $\delta$  e  $\delta + d\delta$  e  $n$  como o número total de poros, então:

$$n_{\delta} = n f(\delta) d\delta \quad (\text{Eq. 11})$$

A área da seção transversal ocupada pelos poros com diâmetro entre  $\delta$  e  $\delta + d\delta$  é dada por:

$$dA_c = \pi \frac{\delta^2}{4} n f(\delta) d\delta \quad (\text{Eq. 12})$$

A área da seção transversal ocupada por todos os poros é obtida integrando-se a Equação (12) e é equivalente a:

$$A_c = n \frac{\pi \bar{R}^2}{4} \quad (\text{Eq. 13})$$

onde,  $\bar{R}^2$  é a constante definida por:

$$\bar{R}^2 = \int_0^{\infty} f(\delta) \delta^2 d\delta \quad (\text{Eq. 14})$$

O volume ocupado por todos os poros pode ser relacionado com a área da seção transversal, a porosidade e o comprimento do meio poroso da seguinte forma:

$$A_c L_e = \phi A_T L \quad (\text{Eq. 15})$$

Substituindo-se a Equação (13) na Equação (15) e resolvendo para n tubos, pode-se obter:

$$n = \frac{4\phi A_T L}{\pi \bar{R}^2 L_e} \quad (\text{Eq. 16})$$

A taxa de fluxo volumétrico para poros com diâmetro entre  $\delta$  e  $\delta + d\delta$  pode ser obtida pela lei de Hagen-Poiseuille (Sutera e Skalak, 1993) e expressa por:

$$dq_T = n_\delta \frac{\pi \delta^4}{128\mu} \frac{\Delta p}{L_e} \quad (\text{Eq. 17})$$

Substituindo-se a Equação (11) na Equação (17), pode-se obter:

$$dq_T = \frac{\pi \delta^4}{128\mu} \frac{\Delta p}{L_e} n f(\delta) d\delta \quad (\text{Eq. 18})$$

O fluxo volumétrico total para o meio poroso pode ser obtido integrando-se a Equação (18), gerando a expressão:

$$q_T = n \frac{\pi \Delta p}{128\mu L_e} \int_0^{\infty} f(\delta) \delta^4 d\delta \quad (\text{Eq. 19})$$

Substituindo-se a Equação (16) na Equação (19), pode-se obter:

$$q_T = \frac{A_T \phi L \Delta p}{32\mu L_e^2 \bar{R}^2} \int_0^{\infty} f(\delta) \delta^4 d\delta \quad (\text{Eq. 20})$$

Comparando-se a Equação (20) com a Lei de Darcy, Equação (6), pode-se obter a permeabilidade intrínseca do meio modelado como n tubos capilares pela seguinte expressão:

$$k = \frac{\phi L^2}{32 L_e^2 \bar{R}^2} \int_0^{\infty} f(\delta) \delta^4 d\delta \quad (\text{Eq. 21})$$

Substituindo-se a Equação (9) e a Equação (14) na Equação (21), tem-se, finalmente, o seguinte modelo para a estimativa da permeabilidade intrínseca, dada uma função de densidade de probabilidade para distribuição dos diâmetros dos poros:

$$k = \frac{\phi \int_0^{\infty} f(\delta) \delta^4 d\delta}{32\tau \int_0^{\infty} f(\delta) \delta^2 d\delta} \quad (\text{Eq. 22})$$

#### 4.1 Função de densidade de probabilidade para distribuição dos diâmetros dos poros

As partículas de solo, ao se arranjamem, geram padrões de preenchimentos e vazios. De acordo com o tamanho das partículas, geometria e outras especificidades, o padrão estrutural pode variar de um tipo de solo para outro solo. Portanto, dois solos podem apresentar a mesma quantidade de vazios, mas possuir uma distribuição espacial diferente dos poros, e, nos solos, essa distribuição dos poros pode, ainda, se dar a partir da formação de grupos de poros de tamanho distinto, o que interfere diretamente no fluxo e em sua natureza. Por exemplo, os solos argilosos profundamente intemperizados formam grupamentos de partículas, os agregados e microagregados, nos quais predominam microporos em seu interior e, por força desses elementos maiores formados, entre eles, existirão macroporos, poros que comandarão o fluxo imediato, mas que a médio e longo prazo poderão dar origem a outro tipo de fluxo – o fluxo apenas de elementos químicos devido a ações da sucção osmótica e do desequilíbrio químico que pode surgir em consequência da natureza do fluido pré-existente e daquele que passa a existir adentrando no meio poroso. Isso implica que, mesmo que possuam um índice em comum, outras propriedades podem variar sem que estejam intrinsecamente correlacionadas.

Em geral, podem-se agrupar os solos em unimodais e bimodais em relação à distribuição de seus poros, embora outras formas de distribuição menos frequentes, como as trimodais ou mesmo aquelas nas quais não ocorre a concentração de um tamanho único de poros, possam se fazer presentes (Figura 6). Experimentalmente, portanto, verifica-se que cada solo pode possuir uma, duas ou mais faixas de tamanhos de poros mais frequentes. Caso o solo possua apenas uma faixa com maior probabilidade, seja essa faixa estreita (como a que caracteriza uma areia uniforme), ou larga (como a que caracteriza uma areia bem graduada), pode-se denominá-lo como unimodal. Que, do termo estatístico moda, apresenta apenas uma tendência. Já um solo com duas faixas predominantes pode ser denominado como bimodal, assim como apresentado na Figura 7. Não necessariamente cada faixa apresentará o mesmo pico ou a mesma relevância, aliás, nos perfis de intemperismo, a intensidade relativa entre eles dependerá do grau de meteorização sofrido pelo solo. Ainda, podem-se perceber casos em que, mesmo havendo duas faixas, há uma aproximação das curvas, apresentando certa dificuldade em distingui-las.

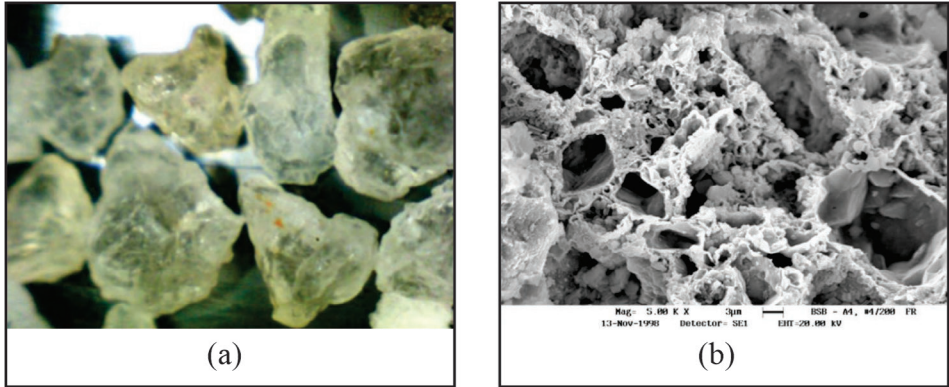


Figura 6 – Microscopia: (a) Óptica de solo granular uniforme; (b) Eletrônica de solo com distribuição trimodal

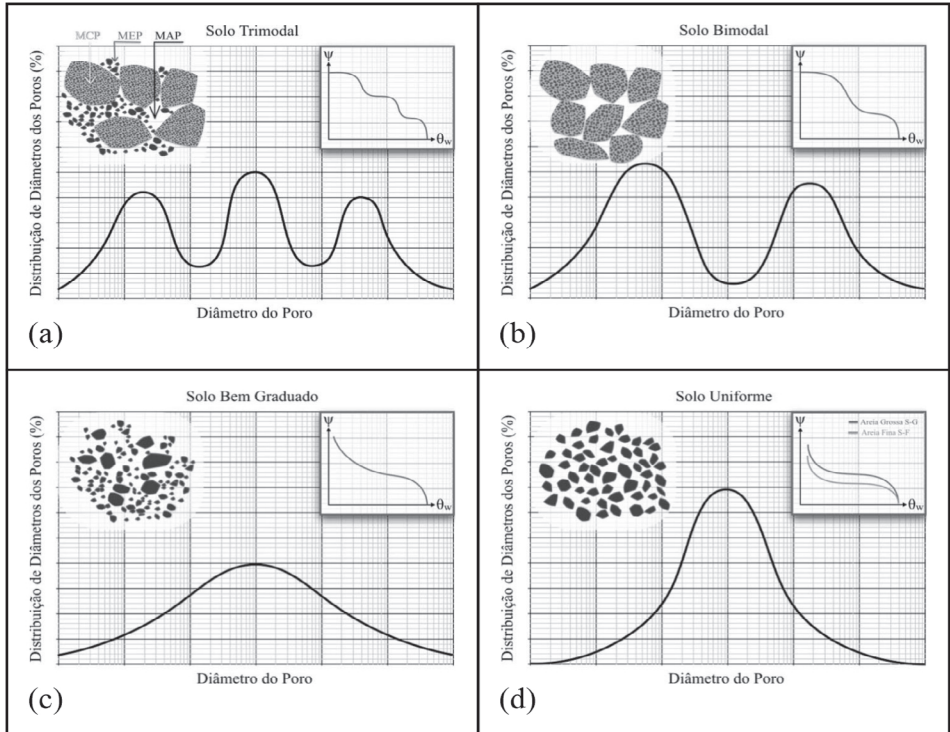


Figura 7 – Função de densidade de probabilidade para distribuição dos diâmetros dos poros: (a) Distribuição trimodal para solos com presença concentrada de microporos (MCP), mesoporos (MEP) e macroporos (MAP); (b) Distribuição bimodal para solos com presença predominante de micro e macroporos; (c) Distribuição unimodal para solos bem graduados; (d) Distribuição unimodal para solos uniformes

Sabe-se que solos de distribuição unimodais em relação às partículas também tendem a ser unimodais em relação aos vazios, cabendo, aqui, destacar que essa observação só é válida para solos tratados na mesma condição, ou seja, se as partículas estão agrupadas ou desagrupadas no estado natural do solo. A distribuição dos poros citada só será válida para as partículas no mesmo estado de referência. Nessa hipótese, os diâmetros dos poros podem ser modelados por uma função de densidade de probabilidade log-normal, isto é, uma função contínua, na qual o logaritmo dos diâmetros dos poros possui uma distribuição normal. Nesse caso, a função de densidade de probabilidade e a função de distribuição acumulada dos diâmetros dos poros são, respectivamente, dadas por:

$$f(\delta) = \frac{1}{\sigma_{\delta}\sqrt{2\pi\delta}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(\delta/\bar{\delta})}{\sigma_{\delta}}\right)^2\right) \quad (\text{Eq. 23})$$

$$F(\delta) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\ln(\delta/\bar{\delta})}{\sigma_{\delta}\sqrt{2}}\right)\right) \quad (\text{Eq. 24})$$

com,

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx \quad (\text{Eq. 25})$$

onde,  $\bar{\delta}$  é a média geométrica dos diâmetros dos poros, e  $\sigma_{\delta}$  é o desvio padrão de  $\ln\delta$ .

Fredlund *et al.* (2000) apresentaram formulações analíticas para descrição do comportamento unimodal e bimodal das curvas granulométricas. Adotando a mesma hipótese de que solos de distribuição unimodais em relação às partículas também tendem a ser unimodais em relação aos vazios, o modelo de Fredlund *et al.* (2000) foi adaptado, neste capítulo, para representar uma faixa de distribuição de poros. Dessa forma, a função de distribuição acumulada dos diâmetros dos poros é dada por:

$$F_p(\delta) = \frac{1}{\left\{ \ln\left[ \exp(1) + \left(\frac{a_{gr}}{\delta}\right)^{n_{gr}} \right] \right\}^{m_{gr}}} \left\{ 1 - \frac{\left[ \ln\left(1 + \frac{d_{rgr}}{\delta}\right) \right]^7}{\left[ \ln\left(1 + \frac{d_{rgr}}{d_m}\right) \right]^7} \right\} \quad (\text{Eq. 26})$$

onde,

- $a_{gr}$  é o parâmetro correspondente ao ponto de inflexão da função;
- $n_{gr}$  é um parâmetro que determina a uniformidade da distribuição;
- $m_{gr}$  é o parâmetro relacionado ao formato da curva próximo às regiões finas;
- $d_{rgr}$  é o parâmetro relacionado à quantidade de finos no solo;
- $\delta$  é o diâmetro de cada poro considerado [L];
- $d_m$  é o diâmetro do menor poro considerado [L].

Derivando-se a função de distribuição acumulada dos diâmetros dos poros, Equação (26), é possível estabelecer a função de densidade de probabilidade para distribuição dos diâmetros dos poros, dada por:

$$f_p(\delta) = \ln(10) \cdot \delta \cdot \frac{dF_p}{d\delta} \quad (\text{Eq. 27})$$

#### 4.2 Função de densidade de probabilidade para distribuição dos diâmetros dos poros geradas por autômatos celulares

Os ACE e AC2D podem ser utilizados para modelar a função de densidade de probabilidade para a distribuição dos diâmetros dos poros. Este item apresenta a metodologia para utilização de um ACE. Inicialmente, define-se a regra que será utilizada para geração do ACE. Em seguida, impõe-se a condição inicial do sistema a partir da definição da primeira linha do autômato. Por último, define-se o tamanho da malha que será analisada. Na Figura 8, é apresentado o ACE descrito pela regra 89 e uma condição inicial aleatória em uma malha de 400 colunas e 200 linhas.

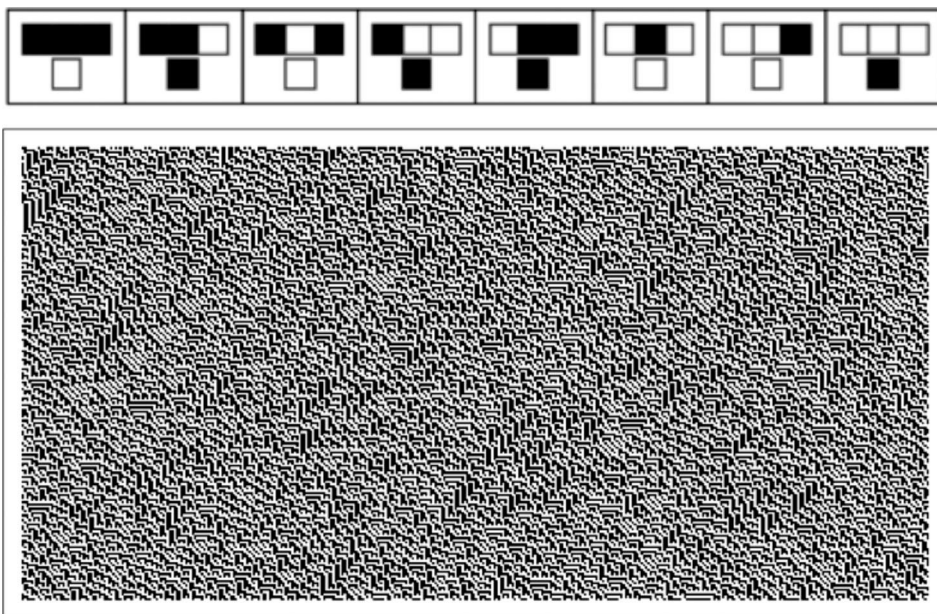


Figura 8 – Autômato celular elementar (Regra 89)

Computacionalmente, tem-se que qualquer autômato gerado é um vetor n-dimensional. A malha apresentada pela Figura 8 é, simplesmente, a representação gráfica de uma matriz composta por 0's e 1's. Logo, fazendo-se um paralelo aos meios porosos, pode-se considerar os vazios como sendo representados pelos números 1's e os grãos pelos nú-



meros 0's. Nesse caso, a porosidade do ACE pode ser definida pela razão entre a área de vazios e a área total da malha em estudo, dada por:

$$n = \frac{\sum_{i,j} a_{ij}}{l \cdot h} \quad (\text{Eq. 28})$$

onde,

$a_{ij}$  é o elemento da matriz da linha  $i$  e coluna  $j$ , correspondente ao valor 1;

$l$  é número de linhas da matriz;

$h$  é o número de colunas da matriz.

Em outras palavras, para se obter a porosidade do ACE, basta somar todas as células vazias e dividir o resultado pelo número de células totais. Dessa forma, a porosidade do ACE apresentado na Figura 8 é igual a 49%.

Pode-se, ainda, inferir diversas propriedades correlatas ao solo, a partir do ACE, tais como a função de densidade de probabilidade para distribuição dos diâmetros dos poros, a função de distribuição acumulada dos diâmetros dos poros e a permeabilidade intrínseca.

Para a determinação da função de densidade de probabilidade para distribuição dos diâmetros dos poros, primeiramente, deve-se identificar os poros. Para isso, um algoritmo analisa a malha e identifica todas as células de vazios que estão interligadas por arestas. Em seguida, o algoritmo verifica, em cada conjunto, o número de células que compõe cada vazio. Logo, é gerado um vetor que enumera os poros e suas respectivas áreas e diâmetros equivalentes. Paralelamente, outro algoritmo identifica quantos vazios há para um intervalo de diâmetros. Tal algoritmo faz isso para vários intervalos e obtém, em porcentagem, a quantidade de poros para cada faixa de diâmetro. Plotando-se tais números e interligando-os, pode-se obter a função de densidade de probabilidade para distribuição dos diâmetros dos poros.

Para se obter uma função de densidade de probabilidade para distribuição dos diâmetros dos poros com equivalência real a um solo, deve-se atribuir uma escala à malha. Para isso, define-se o comprimento da menor dimensão da malha, isto é, o valor da largura da célula. Neste capítulo, voltado para solos granulares, considerou-se o valor da menor dimensão da malha correspondente ao diâmetro efetivo do solo,  $D_{10}$ , salientando-se, no entanto, que, para solos argilosos, esse limite deve ser outro, pois o  $D_{10}$  nem sempre é distinguível ou mesmo, só podendo ser distinguível em nível de nanopartículas.

Nesse exemplo, definiu-se  $D_{10}$  como 0,03 mm. A função de densidade de probabilidade para a distribuição dos diâmetros dos poros obtida encontra-se apresentada na Figura 9. É notável o fato de que a curva apresenta um aspecto bimodal, típico dos solos estruturados (que guarda certa semelhança com o solo poroso colapsível do Distrito Federal), no qual a presença dos micros e dos macroporos é estabelecida na literatura (Farias, 2012; Otálvaro, 2013).

Ao se integrar numericamente, a função de densidade de probabilidade para a distribuição dos diâmetros dos poros (Figura 9), utilizando-se o método do retângulo, por



exemplo, pode-se obter a função de distribuição acumulada dos diâmetros dos poros. Computacionalmente, isso pode ser feito ao se analisar o vetor de poros com respectivos diâmetros equivalentes e verificar quantos vazios são menores do que determinado patamar. Para isso, deve-se começar da menor dimensão de poros até a maior, avançando-se pouco a pouco. Com isso, é possível obter outra distribuição de pontos, que correlaciona um diâmetro com a porcentagem de poros de diâmetros menores do que ele. Interligando-se a distribuição, pode-se obter função de distribuição acumulada dos diâmetros dos poros, assim como mostrada na Figura 10. Mais uma vez, a curva obtida é típica de um solo de comportamento bimodal e, fazendo-se um paralelo com a curva de distribuição granulométrica, ela seria representativa de um material com graduação aberta.

Pode-se, ainda, obter a permeabilidade intrínseca aplicando-se a Equação e admitindo-se uma faixa de variação da tortuosidade. Computacionalmente, basta utilizar o vetor que gera a função de distribuição acumulada dos diâmetros dos poros e aplicar integração numérica de acordo com a Equação a partir do método do retângulo. Com isso, pode-se obter uma curva da variação da permeabilidade intrínseca para diferentes tortuosidades (Figura 11). Pela Figura 11, constata-se que a permeabilidade intrínseca diminui com o aumento da tortuosidade do solo.

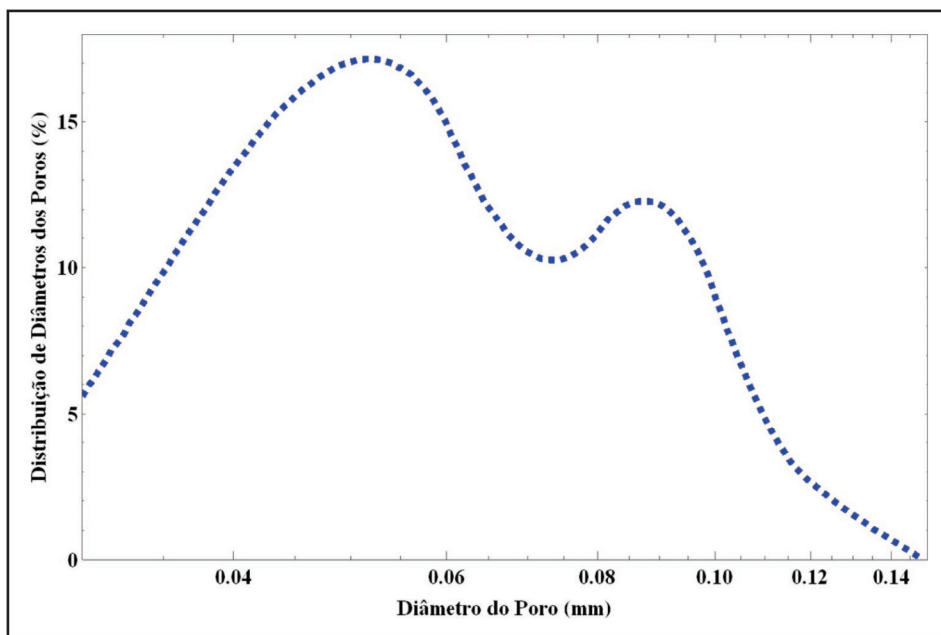


Figura 9 – Função de densidade de probabilidade para distribuição dos diâmetros dos poros gerada pelo ACE 89

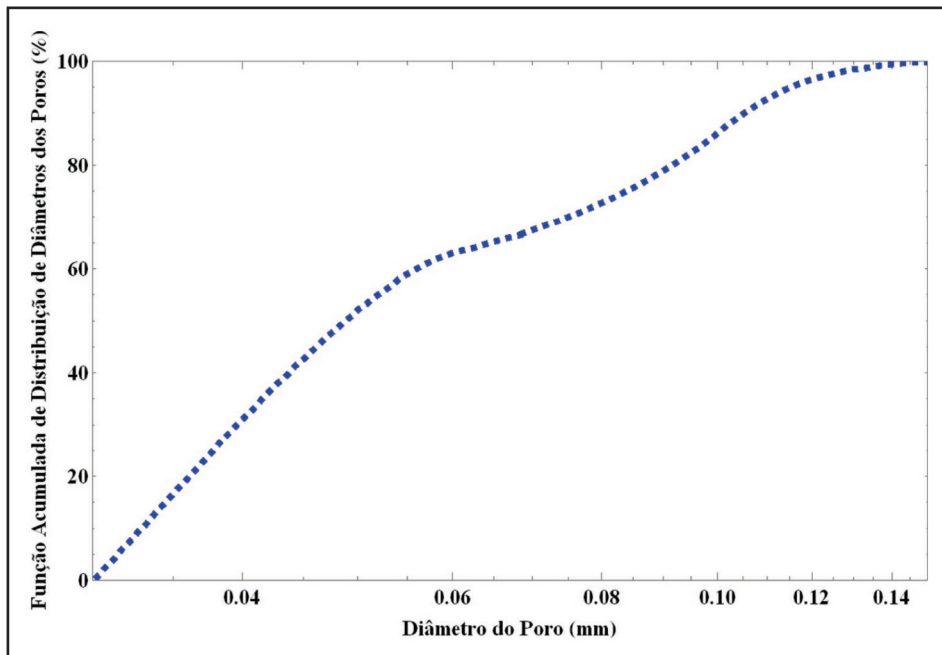


Figura 10 – Função de distribuição acumulada dos diâmetros dos poros gerada pelo ACE 89

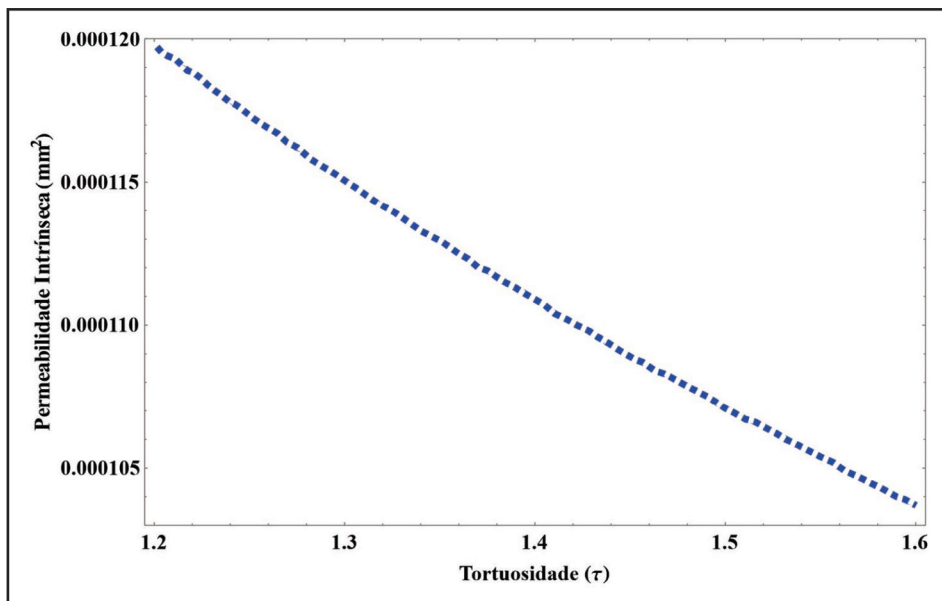


Figura 11 – Curva de permeabilidade intrínseca versus tortuosidade gerada pelo ACE 89

## 5. VALIDAÇÃO NUMÉRICA UTILIZANDO-SE MICROTOMOGRAFIAS COMPUTADORIZADAS

A tomografia computadorizada (TC) é o processo de obtenção da imagem da seção transversal ou da fatia de um corpo, utilizando-se um equipamento externo, controlado por computador. O processo ocorre por meio de múltiplas projeções obtidas da emissão de fótons com energia suficiente para atravessar o corpo de interesse, dentre as quais se tem raios X e raios gama. Ao serem atravessados pelo feixe de fótons, os materiais mais densos absorvem mais radiação que os menos densos. A energia do feixe ao atravessar o objeto é projetada em um dispositivo chamado de “detector”. Assim, uma TC indica a quantidade de radiação absorvida por cada partícula do objeto analisado (radiodensidade, dada pelo coeficiente de atenuação), e traduz essas variações em uma escala de cinzas, produzindo uma imagem. Cada pixel da imagem corresponde à média da absorção nessa zona (Herman, 2009).

O princípio de funcionamento de um tomógrafo de raios X está fundamentado na interação de um feixe de fótons com o objeto de análise. Uma parte da energia do feixe proveniente de uma fonte de raios X é absorvida pelo objeto e o resto é projetado em um conjunto de detectores. Os dados são processados por computadores que geram a imagem tridimensional por meio de algoritmos de reconstrução implementados em softwares especializados. Os fundamentos teóricos da interação da radiação com a matéria são descritos por vários autores, dentre eles, podem ser citados Manz e Gladden (1999) e Knoll (1983).

Durante a varredura tomográfica, as projeções são obtidas em várias posições angulares igualmente espaçadas até completar 360°. A partir dessas projeções, é possível reconstruir matematicamente a imagem do objeto, isto é, os valores do coeficiente de atenuação linear são calculados para cada ponto do plano tomográfico e uma imagem pode ser associada a esses valores distribuídos em uma escala de cinzas ou cores. Em seguida, por meio de algoritmos de reconstrução, é possível obter uma série de imagens 2D das seções transversais ao longo do eixo axial da amostra, que, por sua vez, são empregadas para a reconstrução da estrutura interna do objeto em 3D. Em Naime (2001) e Matrecano (2011), pode-se encontrar uma descrição dos principais algoritmos de reconstrução de imagens tomográficas.

O uso de tomógrafo para o estudo de solos iniciou-se na década de 80 com os trabalhos pioneiros de Petrovic *et al.* (1982), Hainsworth e Aylmore (1983) e Crestana (1985). As primeiras pesquisas foram realizadas com os tomógrafos médicos, que têm uma resolução limitada a 200 micras e empregam raios policromáticos. Posteriormente, o desenvolvimento dos chamados micro-TC, que permitem gerar feixes monocromáticos de raios X que podem ser modulados, e apresentam resoluções muito maiores (até um micron), permitiu grandes avanços no estudo e na caracterização da estrutura interna dos meios porosos (Menzel *et al.*, 1998; Matrecano, 2011; Vaz *et al.*, 2011; Gan e Wang, 2012).

Neste capítulo, apresentam-se os resultados de um estudo em que foi utilizada uma areia pouco argilosa fornecida pelo Laboratório de Geotecnia da Universidade de Brasília – UnB (Tabela 1). O material é de uso comum na construção civil no Distrito Fede-

ral. A aquisição das projeções e a reconstrução de imagens bidimensionais foram feitas utilizando-se um microtomógrafo de raio-X de quarta geração, modelo SkyScan 1172, da Embrapa Instrumentação Agropecuária – São Carlos. Na Tabela 1, aparece um resumo do processo de binarização da imagem utilizada e da geração do ACE.

Ao se binarizar a imagem tomográfica da areia, pôde-se obter uma clara distinção entre vazios e grãos de solo (Figura 12). Para tanto, um algoritmo determina um limite de claridade da imagem e todos os pixels que estão abaixo ou acima passam a ter o valor 0 ou 1, respectivamente. Logo, o mesmo princípio aplicado para se determinar a função de densidade de probabilidade para a distribuição dos diâmetros dos poros e demais características no caso de autômatos celulares pode ser aplicado para tomografias computadorizadas. Todavia, faz-se necessário, a partir da precisão da fotografia, definir a dimensão de cada pixel, ou seja, tem-se de estabelecer o comprimento de cada pixel em uma escala linear. Tal passo é totalmente análogo à atribuição do  $D_{10}$  no caso dos autômatos celulares. Como a tomografia é única, a porosidade se mantém constante e independente das dimensões utilizadas. Atribuindo-se, portanto, o valor de  $3 \cdot 10^{-4}$  mm como a menor dimensão do pixel da imagem binarizada, pode-se determinar a função de distribuição acumulada dos diâmetros dos poros (Figura 13). A função de distribuição acumulada dos diâmetros dos poros para a imagem binarizada da tomografia da areia apresentou um aspecto tipicamente esperado em solos com distribuições de poros unimodais. Esse fato é facilmente explicável, tendo em vista o caráter granular do material em estudo.

Tabela 1 – Resultados dos ensaios laboratoriais realizados na Areia Argilosa

Parâmetro	Valor	Norma utilizada
Densidade Relativa (Gs)	2,68	ASTM D7263 – 09
Porosidade (n)	66%	ASTM D7263 – 09
Permeabilidade [m/s]	$2 \cdot 10^{-5}$	NBR 14545/2000
LL	54%	NBR 6459/1984
LP	39%	NBR 7180/1984

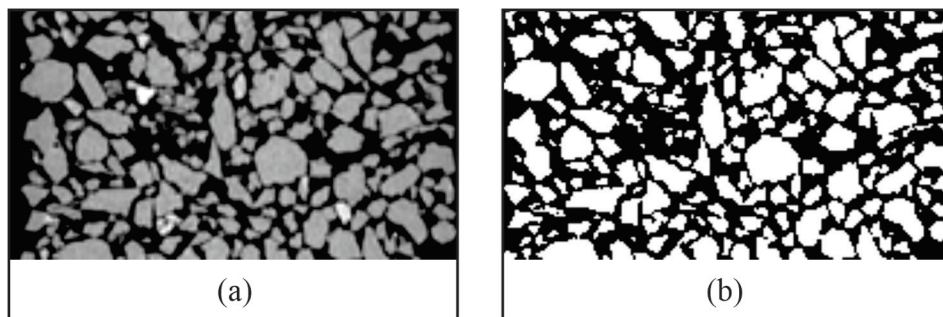


Figura 12 – Imagens da areia argilosa obtidas por meio da TC:  
(a) Imagem original; (b) Imagem binarizada.

De posse da função de distribuição acumulada dos diâmetros dos poros para a imagem binarizada da tomografia da areia (Figura 12), foi obtido o autômato celular que melhor se enquadrava nas características de distribuição de poros da referida imagem. O resultado encontra-se apresentado na Figura 14. Além disso, o modelo foi verificado utilizando-se a Equação proposta por Fredlund *et al.* (2000) e adaptada para este estudo. Os parâmetros utilizados foram  $a_{gr} = 1,19$ ;  $n_{gr} = 3$ ;  $m_{gr} = 0,9$ ;  $d_{gr} = 1000$  e  $d_m = 0,05$  mm.

De posse dos resultados apresentados na Figura 14, foi possível determinar a curva de permeabilidade intrínseca *versus* tortuosidade correspondente ao caso em estudo (Figura 15). Conhecido o valor da condutividade hidráulica da areia argilosa (Tabela 1), foi possível determinar o valor da permeabilidade intrínseca, admitindo-se o fluido como sendo a água ( $k = 2.10^{-6}$  mm<sup>2</sup>). Dessa forma, constata-se que a tortuosidade que define o material em estudo é 2,3.

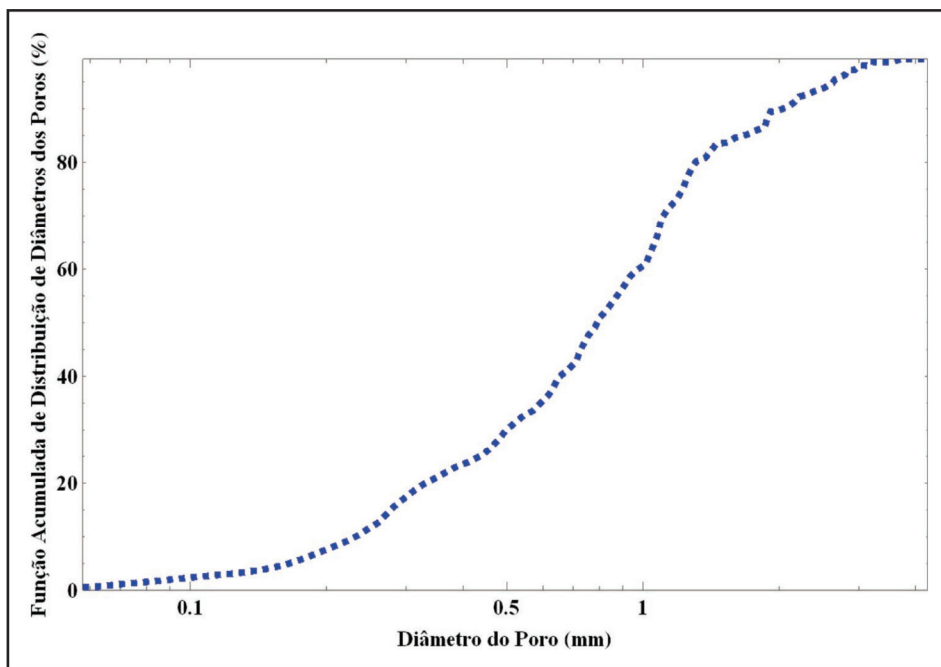


Figura 13 – Função de distribuição acumulada dos diâmetros dos poros para a imagem binarizada da tomografia da areia

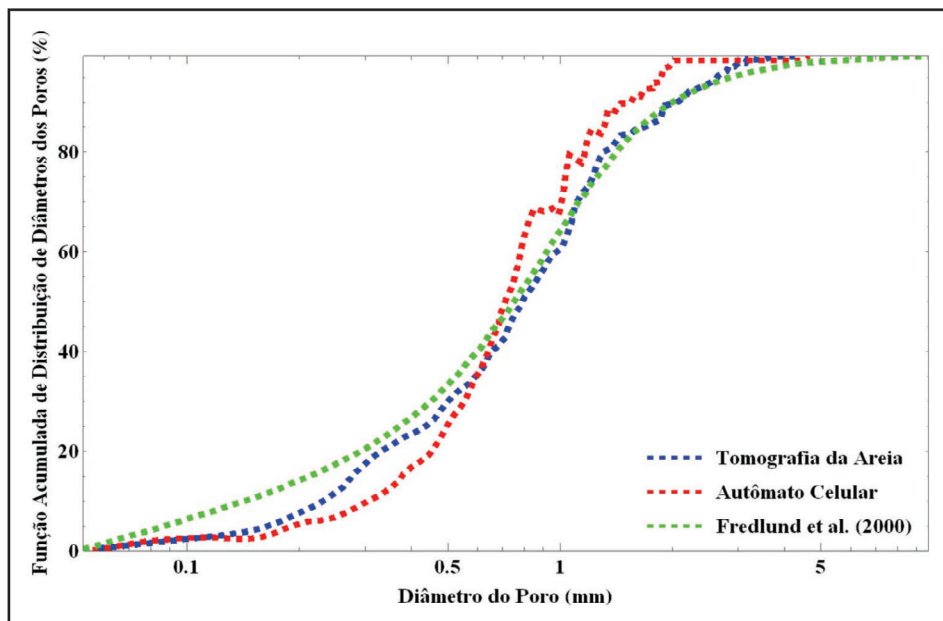


Figura 14 – Comparação entre as funções de distribuição acumulada dos diâmetros dos poros obtidas para a imagem binarizada da tomografia da areia para o autômato celular e pelo método proposto por Fredlund *et al.* (2000)

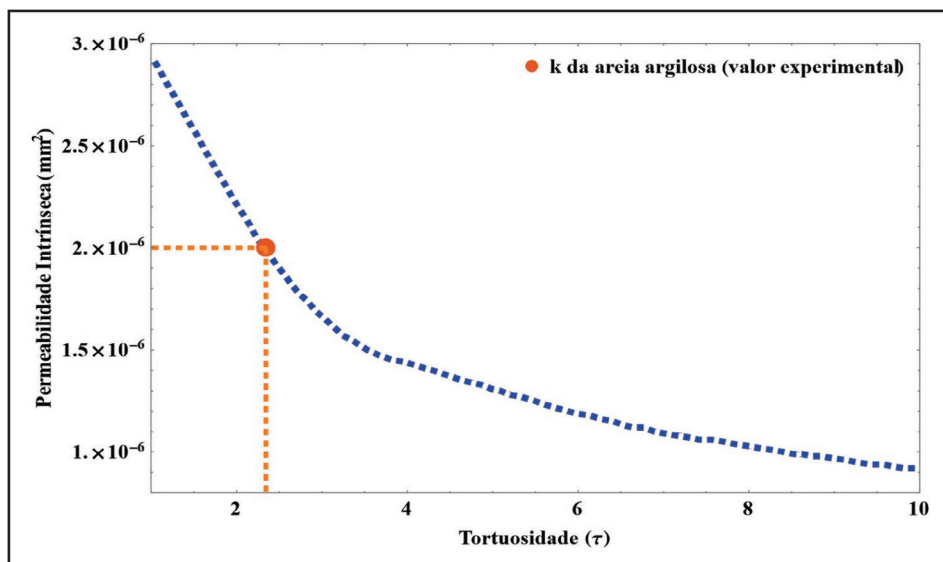


Figura 15 – Curva de permeabilidade intrínseca versus tortuosidade gerada para o autômato celular

## 6. CURVA DE RETENÇÃO DE ÁGUA NO SOLO

A relação entre o teor de umidade volumétrico de um solo e a sucção é uma função contínua, gradativa, na qual a sucção varia inversamente com o teor de umidade volumétrico, ou seja, a sucção tende a um valor nulo à medida que o solo se aproxima da saturação e a um valor máximo quando o grau de saturação tende a zero. A representação gráfica entre o teor de umidade volumétrico e a sucção é denominada curva de retenção de água no solo ou curva característica solo-água. Van Genuchten (1980) propôs uma função para o ajuste da curva característica dada por:

$$\theta_w(\psi) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \frac{(1 + (\alpha \cdot \psi)^n)^{1/n}}{1 + (\alpha \cdot \psi)^n} \quad (\text{Eq. 29})$$

onde,

$\theta_w$  é o teor de umidade volumétrica [ $L^3L^{-3}$ ];

$\theta_r$  é o teor de umidade volumétrica residual [ $L^3L^{-3}$ ];

$\theta_s$  é o teor de umidade volumétrica saturada [ $L^3L^{-3}$ ];

$\psi$  é a sucção [ $FL^{-2}$ ];

$\alpha$  e  $n$  são parâmetros de ajuste do modelo.

Dentre os métodos de previsão da curva de retenção (ou característica), um dos mais citados é o de Arya e Paris (1981). Segundo esses autores, a curva granulométrica permite a obtenção indireta da distribuição de poros do solo com um arranjo idealizado das partículas. Para os autores, a curva granulométrica pode ser dividida em  $n$  frações arbitrárias. Além disso, os autores estabeleceram que cada fração possui um diâmetro médio do poro e uma curva característica idealizada. Adotando-se a mesma hipótese de que solos de distribuição unimodal em relação às partículas também tendem a ser unimodais em relação aos vazios, o modelo de Arya e Paris (1981) foi adaptado, neste trabalho, para gerar a curva característica idealizada a partir de uma faixa de distribuição de poros definida pelo AC. Tal hipótese, para que tenha sua validade ampliada para solos contendo agregados, requer que se entenda as agregações como grãos maciços com densidade considerada aparente por englobar a microporosidade interna.

A curva de retenção idealizada para cada fração é definida pelo valor de entrada de ar e por uma drenagem total e abrupta. Conforme cada nova fração é drenada, uma porcentagem dos vazios do solo é drenada. Diversas hipóteses simplificadoras são adotadas pelo modelo de Arya e Paris (1981). A massa específica do solo é assumida constante e idêntica em todas as  $n$  frações. As partículas de cada fração são consideradas esféricas e com diâmetro igual ao diâmetro médio de cada fração. O volume dos poros de cada fração é idealizado como sendo um tubo capilar cilíndrico cujo raio é associado ao raio médio das partículas da fração. A Equação de Capilaridade de Kelvin é aplicada a cada fração. Histerese e seus mecanismos geradores não são considerados. Portanto, o modelo se limita ao caso de materiais granulares pouco ativos e com certa uniformidade mineralógica, mas sua análise permite, o entendimento da forma da curva de retenção de materiais como as areias quartzosas.

O volume de sólidos e o volume de vazios de cada fração é calculado, respectivamente, assumindo-se que:

$$V_{s_i} = \frac{m_{s_i}}{\rho_s} \quad (\text{Eq. 30})$$

$$V_{v_i} = \frac{m_{s_i}}{\rho_s} e \quad (\text{Eq. 31})$$

onde,

$m_{s_i}$  é a massa das partículas de cada fração  $i$  ( $i$  variando de 1 até  $n$ )

$\rho_s$  é a massa específica das partículas [ $\text{ML}^{-3}$ ];

$e$  é o índice de vazios.

O valor  $m_{s_i}$  corresponde à percentagem de partículas pertencentes à fração  $i$ , obtida da curva granulométrica (gerada com a mesma metodologia AC, mas associando-se a distribuição ao valor 0) é dado por:

$$m_{s_i} = P_{i+1} - P_i \quad (\text{Eq. 32})$$

Na hipótese de que os poros são preenchidos por água progressivamente, o teor de umidade volumétrico, acumulado até a fração  $n$ , é computado da seguinte forma:

$$\theta_{w_i} = \frac{\sum_{j=1}^i V_{v_j}}{V} \quad (\text{Eq. 33})$$

onde,

$V_{v_j}$  é definido pela Equação [L<sup>3</sup>];

$\rho_d$  é a massa específica seca do solo [ $\text{ML}^{-3}$ ].

$V$  é o volume total de solo [L<sup>3</sup>], dado por:

$$V = \frac{\sum_i m_{s_i}}{\rho_d} \quad (\text{Eq. 34})$$

Uma vez que a quantidade total de massa de solo é unitária ( $\sum m_{s_i} = 1$ ), a Equação (34) reescreve-se na forma:

$$V = \frac{1}{\rho_d} \quad (\text{Eq. 35})$$

Substituindo-se a Equação (35) na Equação (36), segue que:

$$\theta_{w_i} = \rho_d \sum_{j=1}^i V_{v_j} \quad (\text{Eq. 36})$$



O teor de umidade volumétrica correspondente ao ponto central de cada fração de solo é dado por:

$$\theta_{w_i}^* = \frac{\theta_{w_i} + \theta_{w_{i+1}}}{2} \quad (\text{Eq. 37})$$

Deve-se estabelecer a sucção mátrica correspondente a cada fração. Arya e Paris (1981) assumem que cada fração de solo é formada por  $n_i$  partículas esféricas, resultando em um volume de sólidos,  $V_{s_i}$ , e um volume de vazios,  $V_{v_i}$ , dados, respectivamente, por:

$$V_{s_i} = n_i 4\pi \frac{R_i^3}{3} \quad (\text{Eq. 38})$$

$$V_{v_i} = \pi r_i^2 h_i \quad (\text{Eq. 39})$$

onde,

$R_i$  é o raio médio das partículas de cada fração [L];

$r_i$  é o raio médio dos poros de cada fração [L];

$h_i$  é o comprimento total do poro [L].

Arya e Paris (1981) propõem que se iguale o comprimento total do poro ao número de partículas alinhadas ao longo do poro vezes o comprimento contribuído por cada partícula. Considerando-se uma configuração cúbica de partículas esféricas idênticas, o comprimento do poro seria dado por:

$$h_i = n_i 2R_i \quad (\text{Eq. 40})$$

Os autores sugerem a inclusão de um parâmetro empírico  $\alpha$ , para se levar em conta a não esfericidade das partículas:

$$h_i = n_i^\alpha 2R_i \quad (\text{Eq. 41})$$

Combinando-se as Equações (30), (31), (38), (39) e (41), pode-se concluir que:

$$r_i = R_i \sqrt{\frac{2}{3}} e \cdot n_i^{1-\alpha} \quad (\text{Eq. 42})$$

Os valores de  $n_i$  podem ser computados igualando-se a Equação (38) e (30). O valor de sucção correspondente a cada fração é computado utilizando-se a Equação de Capilaridade:

$$\psi_i = \frac{2T_s}{r_i} \quad (\text{Eq. 43})$$

onde,  $T_s$  é a tensão superficial da água [ $\text{FL}^{-1}$ ].

Aplicando-se o método de Arya e Paris (1981) e utilizando-se os resultados obtidos para a função de distribuição acumulada dos diâmetros dos poros do AC, é possível obter a curva característica relativa ao AC (Figura 16).

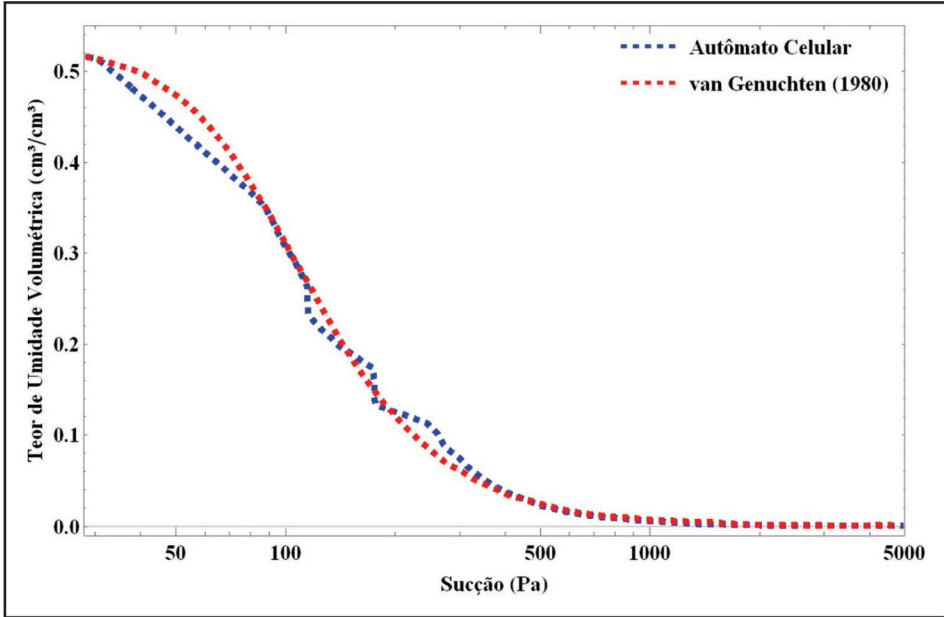


Figura 16 – Curva de retenção gerada para o AC e pela equação de Van Genuchten (Van Genuchten, 1980)

A partir dos resultados obtidos para a curva de retenção (AC), a Equação de Van Genuchten (Van Genuchten, 1980) foi utilizada e os valores que se ajustaram à curva foram  $\theta_r = 0\%$ ,  $\theta_s = 51,6\%$ ,  $\alpha = 0,018$  e  $n = 3$ .

Portanto, é possível conjugar as técnicas tratadas neste capítulo para que se chegue à obtenção de curvas de retenção, em especial, dos materiais granulares.

## 7. NOVA ALTERNATIVA PARA OBTENÇÃO DA CURVA DE RETENÇÃO FUNDAMENTADA EM MODELO ANALÍTICO

Uma equação robusta capaz de sistematizar matematicamente o comportamento do fluxo de água em um solo não saturado é a equação de Richards (Richards, 1931). Tal equação diferencial considera que o teor de umidade volumétrica do solo pode variar, assim como a sucção, no tempo ( $t$ ) e no espaço ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), por meio de:

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{k_x(\psi)}{\rho_w g} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{k_y(\psi)}{\rho_w g} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ k_z(\psi) \left( \frac{1}{\rho_w g} \frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right] \quad (\text{Eq. 44})$$

onde,

$\theta_w$  corresponde ao teor de umidade volumétrica em função da sucção total [ $L^3L^{-3}$ ];

$\psi$  representa a sucção total [ $ML^{-1}T^{-2}$ ];

$k_x$  representa a condutividade hidráulica não saturada na direção x [ $LT^{-1}$ ];

$k_y$  representa a condutividade hidráulica não saturada na direção y [ $LT^{-1}$ ];

$k_z$  representa a condutividade hidráulica não saturada na direção z [ $LT^{-1}$ ];

$\rho_w$  é a massa específica da água [ $ML^{-3}$ ];

$g$  é a aceleração da gravidade [ $LT^{-2}$ ].

Dada a natureza altamente não linear da Equação de Richards, seu emprego geralmente é pautado em condições hidráulicas simplificadas, tais como fluxo estacionário, sendo que a condição transiente raramente é considerada. Entretanto, Cavalcante e Zornberg (2017) apresentaram uma inovadora proposta para sua solução, mostrando que de posse da curva de retenção de água no solo e da função de condutividade hidráulica não saturada, é possível simular o fenômeno do fluxo unidimensional em sistemas não saturados por meio de um único parâmetro de ajuste ( $\delta_{cz}$ ) que conecta matematicamente estas duas funções com a variação temporal do conteúdo de água para os casos em que pode se assumir que a condutividade hidráulica varia linearmente com o conteúdo de água, a difusividade hidráulica é constante e não há mudança de volume do meio.

Considerando a aplicação destas três condições, os referidos autores mostraram que a curva de retenção de água no solo e a função de condutividade hidráulica não saturada, tendo a sucção como variável independente podem ser descritas, respectivamente, por:

$$\theta(\psi) = \theta_s + (\theta_s - \theta_r) \exp[-\delta_{cz}|\psi|] \quad (\text{Eq. 45})$$

$$k_z(\psi) = k_s \exp[-\delta_{cz}|\psi|] \quad (\text{Eq. 46})$$

onde,

$\theta_s$  e  $\theta_r$  correspondem aos teores de umidade volumétrica saturada e residual [ $L^3L^{-3}$ ];

$k_s$  representa a condutividade hidráulica saturada na direção z [ $LT^{-1}$ ];

$\delta_{cz}$  é um parâmetro de ajuste hidráulico [ $M^{-1}L^2T^2$ ].

A Figura 17 apresenta as representações das curvas de retenção de água e de condutividade hidráulica não saturada que podem ser obtidas pelo modelo de Cavalcante e Zornberg (2017).

Por meio da definição de alguns domínios e condições iniciais e de contorno, Cavalcante e Zornberg (2017) obtiveram um conjunto de soluções analíticas que modelam a variação do conteúdo de água em diferentes tempos e profundidade do solo. Essas soluções serão explicitadas neste capítulo para o caso de infiltração unidimensional, com as considerações de contorno de Dirichlet nas simulações de solo com comprimento semi-infinito (caso 1) e finito (caso 2).

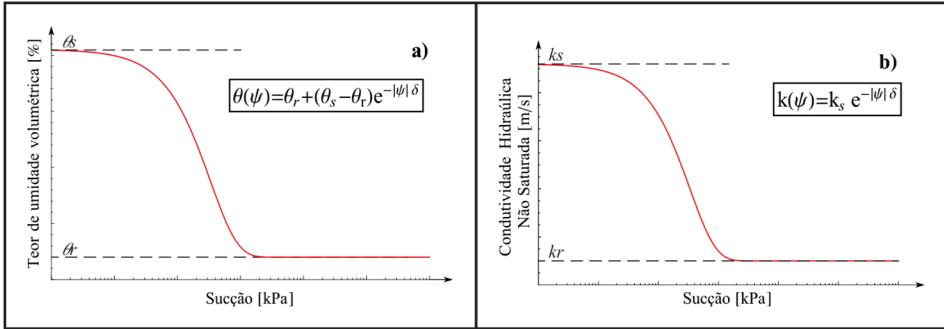


Figura 17 – Representação da curva de retenção de água (a) e condutividade hidráulica não saturada (b) pelo modelo de Cavalcante e Zornberg (2017)

A condição inicial para a resolução de ambos os casos é definida por um teor de umidade inicial uniforme para toda a profundidade da camada de solo avaliada:

$$\theta_w(z, 0) = \theta_i \quad (\text{Eq. 47})$$

onde,  $\theta_i$  é o teor de umidade volumétrica inicial [ $L^3L^{-3}$ ].

A primeira condição de contorno nos dois casos, corresponde a um teor de umidade constante no topo superior,  $\theta_0$ , para todo o tempo analisado, isto é,

$$\theta_w(0, t) = \theta_0 \quad (\text{Eq. 48})$$

Já como segunda condição de contorno, na posição inferior da coluna de solo, tem-se uma condição semi-infinita, para o caso 1, expressa pela Eq. (49), enquanto para o segundo caso, tem-se uma condição análoga, porém para uma coluna de solo com comprimento finito ( $L$ ), expressa neste caso pela Eq. (50):

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial z}(\infty, t) = 0 \quad (\text{Eq. 49})$$

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial z}(L, t) = 0 \quad (\text{Eq. 50})$$

Essas condições inferiores expressam que para uma dada profundidade conhecida,  $L$ , ou que tenda ao infinito, não há variação do teor de umidade com a profundidade. Cada uma das condições de contorno e inicial supracitadas nos casos 1 e 2 encontram-se esquematizadas na Figura 18.

A solução analítica para o caso 1 (semi-infinito) expressa por Cavalcante e Zornberg (2017), é a seguinte:

$$\theta_w(z, t) = \theta_i + (\theta_0 - \theta_i) A(z, t) \quad (\text{Eq. 51})$$

onde,  $A(z, t)$  é dado por:

$$A(z, t) = \frac{1}{2} \left[ \exp\left(\frac{\bar{a}_s z}{D_z}\right) \operatorname{erfc}(Z_{+1}) + \operatorname{erfc}(Z_{-1}) \right] \tag{Eq. 52}$$

em que,

$$Z_{\pm 1} = \frac{z \pm \bar{a}_s t}{2\sqrt{D_z t}} \tag{Eq. 53}$$

e a função erro complementar (erfc), é por definição:

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^z \exp(-t^2) dt \tag{Eq. 54}$$

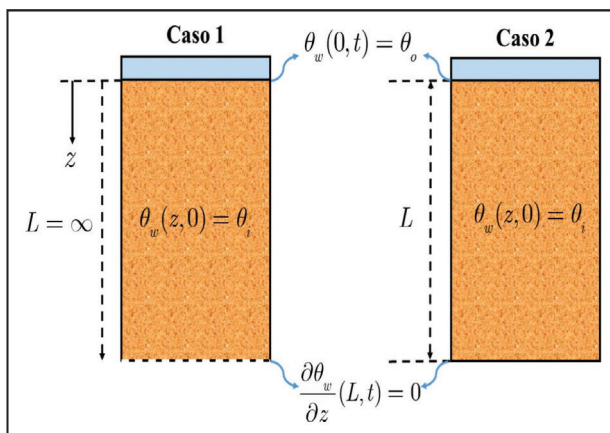


Figura 18 – Representação dos casos 1 e 2 propostos por Cavalcante e Zornberg (2017)

Para o caso 2, a solução analítica, por sua vez, é expressa, como sendo:

$$\theta_w(z, t) = \theta_i + (\theta_o - \theta_i) B(z, t) \tag{Eq. 55}$$

onde, B(z,t) é dado por:

$$B(z, t) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\beta_m \sin\left(\frac{\beta_m z}{L}\right) \exp\left(\frac{\bar{a}_s z}{2D_z} - \frac{\bar{a}_s^2 t}{4D_z} - \frac{\beta_m^2 D_s t}{L^2}\right)}{\left[\beta_m^2 + \frac{\bar{a}_s L}{2D_z} + \left(\frac{\bar{a}_s L}{2D_z}\right)^2\right]} \tag{Eq. 56}$$

no qual,  $\beta_m$ , são os autovalores correspondentes às raízes positivas da equação:

$$\beta_m \cot(\beta_m) + \frac{\bar{a}_s L}{2D_z} = 0 \tag{Eq. 57}$$

De acordo com os autores, apenas a consideração dos quatro primeiros dígitos da série na Eq. (56) é suficiente para a obtenção de resultados acurados, de tal forma que esta equação pode ser aproximada por:

$$\begin{aligned}
 B(z, t) = & \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(Z_{-1}) + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\bar{a}_s z}{\bar{D}_z}\right) \operatorname{erfc}(Z_{+1}) \\
 & + \frac{1}{2} \left[ 2 + \frac{\bar{a}_s (2L - z)}{\bar{D}_z} + \frac{\bar{a}_s^2 t}{\bar{D}_z} \right] \exp\left(\frac{\bar{a}_s L}{\bar{D}_z}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{2L - z + \bar{a}_s t}{2\sqrt{\bar{D}_z t}}\right) \\
 & - \sqrt{\frac{\bar{a}_s^2 t}{\pi \bar{D}_z}} \exp\left(\frac{\bar{a}_s L}{\bar{D}_z} - \frac{(2L - z + \bar{a}_s t)^2}{4\bar{D}_z t}\right)
 \end{aligned} \quad (\text{Eq. 58})$$

Para um grande intervalo de valores de  $\bar{a}_s$ ,  $\bar{d}_z$  e  $L$ , as soluções dos casos 1 e 2 conduzem aos mesmos resultados, isso explica por que muitos autores optam por empregar a solução do caso 1 mesmo para os casos de coluna de solo de comprimento finito.

Uma grande vantagem das soluções apresentadas por Cavalcante e Zornberg (2017), independente do caso, é o fato de se permitir visualizar o fenômeno de infiltração como uma superfície 3D no espaço  $\theta - z - t$ , como exemplificado na Figura 19. Para mais detalhes sobre o modelo apresentado consultar o artigo dos autores citados.

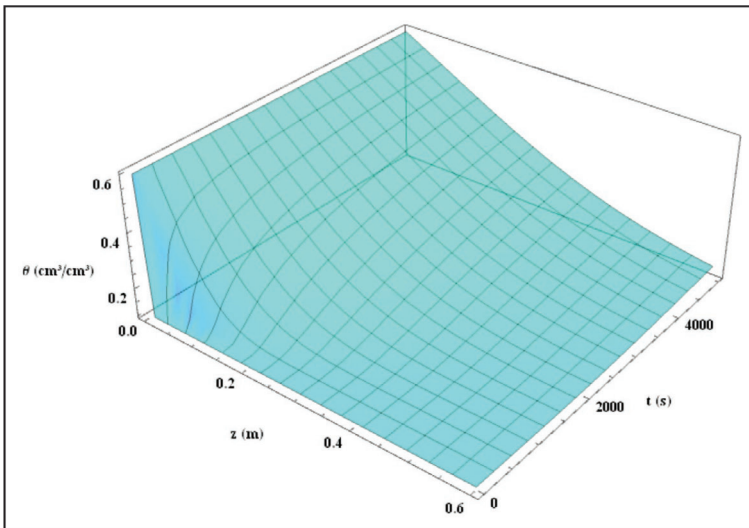


Figura 19 – Representação da superfície de infiltração pelo modelo de Cavalcante e Zornberg (Caso 1)

Uma outra vantagem do modelo de Cavalcante e Zornberg (2017) é a possibilidade de se obter a distribuição de poros de forma indireta a partir da curva de retenção de água no solo, e vice-versa. Para isso, Costa e Cavalcante (2021a) consideraram que os vazios

dos solos poderiam ser representados por tubos capilares, obtendo para a curva de frequência acumulada de raios dos poros ( $S(r)$ ) a expressão:

$$S(r) = \frac{\theta_r + (\theta_s - \theta_r) \exp(-2T_s \delta_{CZ} / r)}{\theta_s} \tag{Eq. 59}$$

Derivando a Eq. (59), é possível obter a distribuição de frequência de raios dos poros que é dada por:

$$\frac{\partial S}{\partial \rho} = \frac{2(\theta_s - \theta_r) \ln(10) \delta_{CZ} T_s \exp(-2\delta_{CZ} / 10^\rho)}{10^\rho \theta_s} \tag{Eq. 60}$$

onde,

$$\rho = \log(r) \tag{Eq. 61}$$

Assim, como foi feito para o tradicional modelo de retenção de van Genuchten é possível ajustar o modelo de retenção de Cavalcante e Zornberg (2017) aos dados da Figura 16 ou da Figura 13 e obter indiretamente os parâmetros hidráulicos do autômato gerado, tais como a curva de condutividade hidráulica não saturada e do avanço da frente de umidade. Na Figura 20 é apresentada a comparação entre a curva de retenção de água obtida pelos modelos de van Genuchten (1980) e Cavalcante e Zornberg (2017) com a do Autômato Celular. Os parâmetros de ajuste do modelo de Cavalcante e Zornberg (2017) foram  $\theta_r = 0\%$ ,  $\theta_s = 60\%$  e  $\delta_{CZ} = 0.007 \text{ Pa}^{-1}$ .

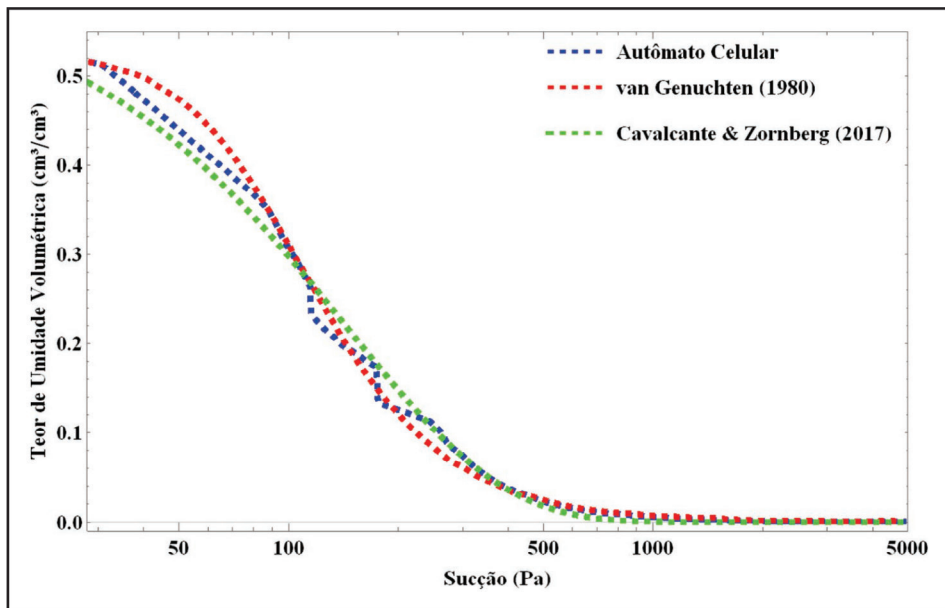


Figura 20 - Comparativo entre as curvas de retenção de água no solo

Para mais informações sobre o modelo de Cavalcante e Zornberg (2017), quanto a aplicações e correlações, consulte os trabalhos de: Cavalcante *et al.* (2019), Sousa (2019), Costa e Cavalcante (2020), Costa e Cavalcante (2021a), Costa e Cavalcante (2021b), Cavalcante e Mascarenhas (2021) e Dantas e Cavalcante (2021).

## 8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como ilustrado nesse capítulo, o método numérico autômatos celulares se mostra como uma excelente ferramenta computacional para a caracterização da estrutura porosa de solos não saturados. O método foi utilizado para caracterizar a estrutura porosa de areia argilosa, apresentando resultados promissores.

A metodologia proposta descreve a função de densidade de probabilidade para a distribuição dos diâmetros dos poros, a função de distribuição acumulada dos diâmetros dos poros, a curva de permeabilidade intrínseca *versus* tortuosidade e a curva de retenção de um autômato celular, previamente escolhido, a partir das análises de tomografias computadorizadas.

A função de distribuição acumulada dos diâmetros dos poros obtida para a imagem binarizada da tomografia da areia para o autômato celular e pelo método proposto por Fredlund *et al.* (2000) se ajustou muito bem. Houve, também, um excelente ajuste entre a curva de retenção gerada para o autômato celular e pelos modelos de van Genuchten (1980) e Cavalcante e Zornberg (2017).

Além disso, a partir de ensaios laboratoriais de permeabilidade, é possível inferir a tortuosidade dos poros presentes no solo com base no valor da permeabilidade intrínseca.

As análises apresentadas neste capítulo representam uma ilustração do potencial das modelagens físicas e numéricas para o entendimento do comportamento dos solos. É evidente que maior complexidade será dada aos modelos e suas interpretações à medida que se incorporem os solos argilosos, os solos com partículas lamelares, os solos contendo agregações, os solos contendo argilominerais expansivos, aqueles com densidades relativas diversas, mas, na engenharia, o entendimento dos fenômenos deve sempre partir do simples para só então adentrar em construções mais elaboradas e engenhosas (Camapum de Carvalho, 2022).

## AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de expressar seus agradecimentos à Universidade de Brasília, à EMBRAPA Instrumentação, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq - Projeto de Pesquisa 305484/2020-6) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

## REFERÊNCIAS

ARYA, L.M. & PARIS, J.F. (1981). A physicoempirical model to predict the soil moisture characteristic from particle-size distribution and bulk density data. *Soil Science Society America Journal*, 45: 1023-1030.



BANDMAN, O. (2011). Using cellular automata for porous media simulation. *The Journal of Supercomputing*, 57 (2): 121-131.

BORGES, L.P.F.; MORAES, R.M.M.; CRESTANA, S. & CAVALCANTE, A.L.B. (2019). Geometric features and fractal nature of soil analyzed by x-ray microtomography image processing. *Int. J. Geomech.* 9(8), 04019088.

CAVALCANTE, A.L.B. & MASCARENHAS, P.V.S. (2021). Efficient approach in modeling the shear strength of unsaturated soil using soil water retention curve. *Acta Geotechnica*, 16(10), 3177-3186.

CAVALCANTE, A.L.B. & ZORNBERG, J.G. (2017). Efficient approach to solving transient unsaturated flow problems. I: Analytical solutions. *Int. J. Geomech.* 17(7), 04017013.

CAVALCANTE, A.L.B.; BORGES, L.P.F. & ZORNBERG, J.G. (2019). New 3D Analytical Solution for Modeling Transient Unsaturated Flow Due to Wetting and Drying. *Int. J. Geomech.*, 19(7), 04019077.

COSTA, M.B.A. & CAVALCANTE, A.L.B. (2020). Novel approach to determine soil-water retention surface. *Int. J. Geomech.* 20(6), 04020054.

COSTA, M.B.A. & CAVALCANTE, A.L.B. (2021a). Bimodal Soil–Water Retention Curve and k-Function Model Using Linear Superposition. *Int. J. Geomech.* 21(7), 04021116.

COSTA, M.B.A. & CAVALCANTE, A.L.B. (2021b). Closure to “Novel Approach to Determine Soil–Water Retention Surface” by Mateus Bezerra Alves da Costa and André Luís Brasil Cavalcante. *Int. J. Geomech.*, 21(8), 07021002.

CRESTANA, S. (1985). A tomografia computadorizada como um novo método para estudos da física da água no solo. Tese de Doutorado em Ciências-Física Aplicada, Universidade de São Paulo, 140 p.

CRESTANA, S.; MASCARENHAS, S. & POZZI-MUCELLI, R.S. (1985). Static and dynamic three-dimensional studies of water in soil using computed tomographic scanning. *Soil Sci.* 140(5), 326-331.

DANTAS, A. P. N. & CAVALCANTE, A. L. B. (2021). Evaluation of antecedent rainfall effects in the analysis of the probability of transient failure in unsaturated slopes. *Proceedings of the 3rd Pan-American Conference on Unsaturated Soils, MATEC Web of Conferences* 337, 03016.

DARCY, H. (1856). *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*. Dalmont, Paris.

FREDLUND, M.D.; FREDLUND, D.G. & WILSON, W. (2000). An equation to represent grain-size distribution. *Canadian Geotechnical Journal*, 37: 817-827.

GAN, M. & WANG, J. (2012). Applications of image processing technique in porous material characterization. *Advanced Image Acquisition, Processing Techniques and Applications I*, Dimitrios Venzas, InTech, Rijeka, Croatia, pp. 109-122.

HAINSWORTH, J.M. & AYLMOORE, L.A.G. (1983). Water extraction by single plant roots. *Australian Journal of Soil Research*, 21: 435-440.

HERMAN, G.T. (2009). *Fundamentals of computerized tomography: Image reconstruction from projection*. Springer, Estados Unidos, 300 p.

KNOLL, G.F. (1983). *Radiation detection and measurement*. John Wiley & Sons, Inc. New York, 354 p.

MANZ, B. & GLADDEN, L.F. (1999). Flow and Dispersion in Porous Media: Lattice-Boltzmann and NMR Studies. *Fluid Mechanics and Transport Phenomena*, 45(9): 1845-1854.

MATRECANO, M. (2011). Porous media characterization by micro-tomographic image processing. Tese de doutorado, Università degli studi di Napoli "Federico II", 126 p.

MENZEL, O.; SCHARFENBERG, R. & HESSE, D. (1998). Characterization of Porous Media by Digital Image Processing. *Chemical Engineering & Technology*, 21(3): 248-253.

NAIME, J.M. (2001). Um novo método para estudos dinâmicos, in situ, da infiltração da água na região não saturada do solo. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 146 p.

OTÁLVARO, I.F. (2013). Comportamento Hidromecânico de um Solo Tropical Compactado. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília, 122 p.

OZELIM, L. C. S. M. & CAVALCANTE, A. L. B. (2018a). Combining Microtomography, 3D Printing, and Numerical Simulations to Study Scale Effects on the Permeability of Porous Media. *International Journal of Geomechanics*, 19, 04018194-04018194-15.

OZELIM, L. C. S. M. & CAVALCANTE, A. L. B. (2018b). 3D Cellular Automata as a Computational Tool to Generate Artificial Porous Media. *International Journal of Geomechanic*, 18, 04018096-1-04018096-22.

OZELIM, L.C. de S.M. (2014) Concepção e Validação de um Modelo Matemático-Digital para o Meio Poroso por meio de Microtomografia, Autômatos Celulares e Impressões 3D. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, 108 p.

OZELIM, L.C. de S.M.; CAVALCANTE, A.L.B. & BORGES, L.P.F. (2012). Continuum versus Discrete: A physically interpretable general rule for cellular automata by means of modular arithmetic. *Complex Systems*, 22(1): 75-99.

PACKARD, N.H. & WOLFRAM, S. (1985). Two-dimensional cellular automata. *Journal of Statistical Physics*, 38(5/6): 901-946.

PERRIER, E.; BIRD, N. & RIEU, M. (1999). Generalizing the fractal model of soil structure: the pore – solid fractal approach. *Geoderma*, 88: 137-164.

PETROVIC, A.M.; SIEBERT, J.E. & RIEKE, P.E. (1982). Soil bulk density in three dimension by computed tomography scanning. *Soil Science Society of America Journal*, 46: 445-450.

PIRES, L.F.; OSNY, O.S.B.; REICHARDT, K. & TIMM, L.C. (2005). Application of gamma-ray computed tomography to analysis of soil structure before density evaluations. *Appl. Radiat. Isotopes* 63, 505-511.

RICHARDS, L.A. (1931). Capillary conduction of liquids through porous medium. *Journal Physics*, 1(2): 318-333.

SCHIFF, J. L. (2008). Automata a discrete view of the world. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 252 p.

SOUSA, P. F. (2019). Determinação das Propriedades Hidráulicas de Solos Não Saturados a partir de Ensaios de Infiltração utilizando Tomografias de Raios Gama. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, 82 p.

SUTERA, S. P. & SKALAK, R. (1993). The history of Poiseuille's law. *Annual review of fluid mechanics*, 25(1), 1-20.

TSENG, C.L.; ALVES, M.C. & CRESTANA, S. (2018a). Quantifying physical and structural soil properties using X-ray microtomography. *Geoderma* 318(15), 78-87. <https://doi.org/10.1016/j.geoderma.2017.11.042>.

TSENG, C.L.; ALVES, M.C.; MILORI, D.M.B.P. & CRESTANA, S. (2018b). Geometric characterization of soil structure through unconventional analytical tools. *Soil Tillage Res.* 181, 37-45. <https://doi.org/10.1016/j.still.2018.03.018>.

VAN GENUCHTEN, M.TH. (1980). A Closed Form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils. *Soil Science Society of America Journal*, 44: 892-898.

VAZ, C.M.; CRESTANA, S.; MASCARENHAS, S.; CRUVINEL, P.E.; REICHARDT, K. & STOLF, R. (1989). Using a computed tomography miniscanner for studying tillage induced soil compaction. *Soil Technol.* 2(3), 313-321. [https://doi.org/10.1016/0933-3630\(89\)90015-9](https://doi.org/10.1016/0933-3630(89)90015-9).

VAZ, C.M.P.; DE MARIA, I.C.; LASSO, P.O. & TULLER, M. (2011). Evaluation of an Advanced Benchtop Micro-Computed Tomography System for Quantifying Porosities and Pore-Size Distributions of Two Brazilian Oxisols. *Soil Science Society of America Journal*, 75(3): 832-841.

WOLFRAM, S. (1983). Statistical mechanics of cellular automata. *Reviews of Modern Physics*, 55(3): 601-644.

WOLFRAM, S. (1984). Universality and complexity in cellular automata. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 10(1-2): 1-35.

WOLFRAM, S. (2002). *A New Kind of Science*. Wolfram Media. Inc, Estados Unidos. 1197 p.

ZUBELDIA, E.H.; OZELIM, L.C.S.M.; CAVALCANTE, A.L.B. & CRESTANA, S. (2016). Cellular Automata and X-Ray Microcomputed Tomography Images for Generating Artificial Porous Media. *Int. J. Geomech.* 16(2), 04015057. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GM.1943-5622.0000527](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000527).

ZUBELDIA, E.H. (2013). *Uso dos autômatos celulares bidimensionais e imagens tomográficas na geração de meios porosos artificiais*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, 93 p.